回忆

定理（不可分一循环子空间分解）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$$

其中 V_i 既是 $\mathcal{A}$-不可分的又是 $\mathcal{A}$-循环的

设 ~~$\mathcal{A}|V_i$~~ $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$, $i=1,\dots,l$

则 $\mu_{\mathcal{A}_i} \in F[t]$ 是某个不可约多项式的幂次.

命题 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的

$$\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

（此时 $\dim V = n$）. 令 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

则 $\mathcal{A}$ 在基底 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下

的矩阵为
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

命题 设 $F = \mathbb{C}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的 ①

令 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$

（此时 $\dim V = n$）. 设 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

则 在基底
$$\vec{e}_i = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}),\quad i=1,\dots,n$$
下. $\mathcal{A}$ 的矩阵为

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & \lambda \end{pmatrix}$$

（称 $J_n(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块）

§7 复矩阵的 Jordan 标准型

（存在性）

定理 7.1. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$（不必两两不同）, $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$A \sim_s J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

证：令 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ~~设 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$~~

由定理6.4

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l \quad (*)$$

其中 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|V_i$

由命题6.3 $\mu_{\mathcal{A}_i} = (t-\lambda_i)^{d_i}$, $i=1,2,\ldots,l$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $d_i \in \mathbb{Z}^+$. 且 V_i 是 $\mathcal{A}$-循环的. 从而 $\dim V_i = d_i$ (命题6.1)

由命题6.4. 存在 V_i 的一组基

$$\vec{e}_{i1}, \ldots, \vec{e}_{id_i}$$

使得 $\mathcal{A}_i$ 在该基下的矩阵为

$$J_{d_i}(\lambda_i)$$

由定理3.2 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_{11}, \ldots, \vec{e}_{1d_1}, \ldots, \vec{e}_{l1}, \ldots, \vec{e}_{ld_l}$ 下

的矩阵 $J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$ ②

即 $A \sim J_A$ ☒.

注：称定理7.1的 J_A 为 A 的一个 Jordan 标准型.

注：① $\lambda_1, \ldots \lambda_l$ 互不相同的元素组成 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

② $\chi_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l}$

$\mu_A = \mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots (t-\lambda_l)^{d_l})$

③ 如果 $d_1 = \cdots = d_l = 1$. 则

$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l \end{pmatrix}$ 此时 $l=n$

即 ~~J_A~~ A 可对角化

注：$d_1, \ldots d_l$ 是否唯一？

l 是否唯一？

即 J_A 是否唯一.

例：计算 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ 的一子 Jordan 标准型

解 ① 计算 A 的极小多项式 $\mu_A=t^3-4t^2+5t-2$

② 在 $\mathbb{C}$ 上分解 $\mu_A=(t-2)(t-1)^2$

③ 设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\longmapsto A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}^3=V(t-2)\oplus V(t-1)$$

猜 $V(t-2)$，$V(t-1)$ 是不是 $\mathcal{A}$-不可分的

$\dim V(t-2)=1$ 或 2

$A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A-2E)=2$

$\Rightarrow \dim V(t-2)=1 \Rightarrow V(t-2)$ $\mathcal{A}$-不可分

$\Rightarrow \dim V(t-1)=2$

$\Rightarrow$ ~~dim~~ $V(t-1)$ $\mathcal{A}$ 不可分

（$\because$ $A|_{V(t-1)}$ 的极小多项式 $(t-1)^2$ [定理6.1] 再用命题6.1和6.3）

由定理7.1

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1(2)&\\&J_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

③

题外话：求 $T\in GL_n(\mathbb{C})$ 使得

$$J_A=T^{-1}AT$$

计算 $V(t-2)$ 的循环向量 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 依命题6.4 的证明造 $J_1(2)$ 的基 $\vec{e}_{11}=\vec{v}$

计算 $V(t-1)$ 的基 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. 求 $V(t-1)$ 的循环向量. 设 $\vec{v}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{v}$ 是循环向量 $\Longleftrightarrow$ $(\vec{v},\mathcal{A}\vec{v})$ 秩是2

$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1\\\alpha_2&\alpha_1+\alpha_2\\0&0\end{pmatrix}=2$

取 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=0$ 得 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{e}_{21}=(\mathcal{A}-\mathcal{E})(\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e}_{22}=\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

在 $\vec{e}_{11}$，$\vec{e}_{21}$，$\vec{e}_{22}$ 下 $\mathcal{A}$ 的矩阵为 J_A

于是 $J_A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

即 $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

计算 A 的一个 Jordan 标准型

解：$\mu_A = t(t+1)^2$

$\mathcal{A}: \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$

由定理6.1.1

$\mathbb{C}^4 = V(t) \oplus V(t+1)$ (*)

极小多项式 t $(t+1)^2$

$\dim V(t) = \dim \ker(\mathcal{A}) = 4 - \operatorname{rank}(A)$

$\because \operatorname{rank}(A) = 3$ $\therefore \dim V(t) = 1$

于是 $V(t)$ $\mathcal{A}$-不可分

由 (*)，$\dim V(t+1) = 3$

$\because$ $\mathcal{A}|_{V(t+1)}$ 的极小多项式 $(t+1)^2$ 次数为 2. $\therefore$ $\mathcal{A}$-可分（命题6.1.1和6.3）

~~情形1~~ $V(t+1) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

其中 W_i $\mathcal{A}$-不可分且 $i=1,2,3$. 则

$\dim W_i = 1$, $\Rightarrow$ $\mathcal{A}|_{W_i}$ 的极小多项式为 t

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}|_{V(t+1)}$ - - - - 为 $t+1$

$\Rightarrow \to\leftarrow$

~~情形2~~ $V(t+1) = U_1 \oplus U_2$

其中 U_1, U_2 $\mathcal{A}$-不可分，且 $\dim U_1 = 1$, $\dim U_2 = 2$ 于是

$\mathcal{A}|_{U_1}$ 上的极小多项式是 $t+1$

$\mathcal{A}|_{U_2}$ - - - - - - $(t+1)^2$

$\Rightarrow$ ~~$J_A = $~~ $\mathbb{C}^4 = V(t) \oplus U_1 \oplus U_2$

极小多项式 t $t+1$. $(t+1)^2$

$A \sim \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(-1) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

□

§8 矩阵的准素有理规范型简介

设 F 为任意域，V 是 F 上的 n 维线性空间。$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$。先设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的。

则由命题 6.3

$$V = F[\mathcal{A}]\vec{v} \text{ 且 } \mu_{\mathcal{A}} = p^m,$$

其中 $p\in F[t]$ 不可约，$m>0$。设 $d=\deg p$

则 $n = dm$.（命题 6.1）

类似于命题 6.4 的证明可得

$$\vec{e}_{ij} = p(\mathcal{A})^{m-i}\circ\mathcal{A}^{d-j}(\vec{v})$$

$i=1,\dots,m$，$j=1,\dots,d$

是 V 的一组基。$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵记为 $J_n(p)$。称为关于 p 的 n 阶广义 Jordan 块。

例：设 $V=\mathbb{R}^4$，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$。

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t^2+1)^2 \qquad \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$$

$\vec{e}_{11} = (\mathcal{A}^2+\mathcal{E})\mathcal{A}(\vec{v})$，$\vec{e}_{12} = (\mathcal{A}^2+\mathcal{E})(\vec{v})$

$\vec{e}_{21} = \mathcal{A}(\vec{v})$，$\vec{e}_{22} = \vec{v}$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_{11}) = (\mathcal{A}^2+\mathcal{E})\mathcal{A}^2(\vec{v}) = (\mathcal{A}^2+\mathcal{E})(\mathcal{A}^2+\mathcal{E}-\mathcal{E})$$

$$= [(\mathcal{A}^2+\mathcal{E})^2 - (\mathcal{A}^2+\mathcal{E})](\vec{v})$$

$$= -(\mathcal{A}^2+\mathcal{E})(\vec{v}) = -\vec{e}_{12}$$

类似地

$\mathcal{A}(\vec{e}_{12}) = \vec{e}_{11}$，$\mathcal{A}(\vec{e}_{21}) = \vec{e}_{12}-\vec{e}_{22}$，$\mathcal{A}(\vec{e}_{22}) = \vec{e}_{21}$

于是

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_{11}), \mathcal{A}(\vec{e}_{12}), \mathcal{A}(\vec{e}_{21}), \mathcal{A}(\vec{e}_{22})) = (\vec{e}_{11}, \vec{e}_{12}, \vec{e}_{21}, \vec{e}_{22})\, J_4(t^2+1)$$

其中

$$J_4(t^2+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 8.1 设 $A\in M_n(F)$，$\mu_A = p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$

~~为 μ_A 在 $F[t]$ 中不可约分解~~ 则存在

$d_1,\dots,d_l\in\mathbb{Z}^+$.

则存在 $l_1,\dots,l_s \in \mathbb{Z}^+$, $p_1,\dots,p_s \in F[t]\setminus F$ 不可约 使得

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{l_1}(p_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{l_s}(p_s) \end{pmatrix}$$

§9 初等因子组

重集 (multi-sets) — 集合中相同的元素允许出现若干次.

例: $\{a, a, b\} \neq \{a, b\}$ (做为重集)

a 重数为2　　a 重数为1

例: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

120的素因子的重集 $\{2, 2, 2, 3, 5\}$

定义: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l \quad (*)$$

其中 $V_1, \dots, V_l$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$, $i=1,\dots,l$. 则重集 $\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A}_l}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组.

例: 设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是恒同算子

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是标准基.

$(*)$ $V = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的直和分解 ($\because \mathcal{A}(\vec{e}_i) = \vec{e}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$)

设 $\mathcal{A}|_{\langle \vec{e}_i \rangle} = \mathcal{A}_i$. $i=1,\dots,n$

则 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组是

$$\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}\} = \{\underbrace{t-1, \dots, t-1}_{n\text{个}}\}$$

目的 ① 证明初等因子组由 $\mathcal{A}$ 确定 与 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解无关

② 通过初等因子组可以"唯一"地确定 Jordan 标准型

引理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$. 首一 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} = pq$, 其中 $p, q \in F[t]\setminus F$. 首一

令 $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$. 则

$$\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} = p.$$

证: $p(\mathcal{A})(\vec{w}) = p(\mathcal{A})(q(\mathcal{A})(\vec{v})) = pq(\mathcal{A})(\vec{v})$

$= \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$ 于是

$\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} \mid p$. (命题5.4 (ii))

$\vec{0} = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\vec{w}) = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(q(\mathcal{A})(\vec{v}))$

$= \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}\, q(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\underset{\overset{\shortparallel}{pq}}{\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}} \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}} \cdot q$ (命题5.4 (ii))

于是 $p \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$. 从而有 $p = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$ $\boxtimes$

引理9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$.

则 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg p, & 0 \le k < m \\ 0, & k \geq m \end{cases}$

证: $\forall \vec{x} \in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$, $\exists f \in F[t]$ 使得

$\vec{x} = f(\mathcal{A})(\vec{v})$ (命题5.3 (iii))

于是 $p(\mathcal{A})^k(\vec{x}) = p(\mathcal{A})^k f(\mathcal{A})(\vec{v})$

$= f(\mathcal{A})(p(\mathcal{A})^k(\vec{v}))$

令 $\vec{w} = p(\mathcal{A})^k(\vec{v})$ 则 $p(\mathcal{A})^k(\vec{x}) = f(\mathcal{A})(\vec{w})$

于是 $\operatorname{im}(p(\mathcal{A})^k) = \{f(\mathcal{A})\vec{w} \mid f \in F[t]\} = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$

(命题5.3 (iii)). 由此可知

$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w})$

当 $k \geq m$ 时 $\mu_{\mathcal{A}} \mid p^k \Rightarrow p(\mathcal{A})^k = \mathcal{O}$

$\Rightarrow \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = 0$.

当 $0 \le k < m$ $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) = \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$ (命题5.

$= \deg p^{m-k}$ (引理9.1)

$= (m-k)\deg p$ $\boxtimes$

引理9.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $f \in F[t]$. 如果 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$, 其中 $U_1, \cdots, U_l$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间, 则

$f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_l)$

证: 令 $W = f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_l)$

由 命题5.2 (i), $f(\mathcal{A})(U_i) \subset U_i$

$i = 1, \cdots, l$.

由第一章命题4.1中(iii)与(i)的等价性

$$W=f(\mathcal{A})(U_1)\oplus\cdots\oplus f(\mathcal{A})(U_l)$$

$\because f(\mathcal{A})(U_i)\subset f(\mathcal{A})(V)$. $\therefore W\subset f(\mathcal{A})(V)$

反之：设 $\vec{w}\in f(\mathcal{A})(V)$. 则 $\exists\vec{v}\in V$, 使得

$$\vec{w}=f(\mathcal{A})(\vec{v})\quad 且$$

$\vec{u}_i\in U_i$ 使得 $\vec{v}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_l$

$$\vec{w}=f(\mathcal{A})(\vec{v})=f(\mathcal{A})(\vec{u}_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(\vec{u}_l)\in W \quad ▨$$

定理9.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$, 其中 $p\in F[t]$ 不可约. 对 $\forall l\in\mathbb{Z}^+$, 令 n_l 为 p^l ~~在某分~~ 是 $\mathcal{A}$ 关于某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解的初等因子组的重数。再令 $r_l=\mathrm{rank}(p(\mathcal{A})^l)$ 其中 $l\in\mathbb{N}$. 则

$$n_l=\frac{1}{d}(r_{l+1}+r_{l-1}-2r_l),$$

其中 $d=\deg(p)$

证：设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$, 其中 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的.

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}|V_i$, $\mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i}$, $i=1,2,\ldots k$.

$\because \mu_i\mid\mu_{\mathcal{A}}$ 且 p 不可约

$\therefore \mu_i=p^{m_i}$, ~~$i=1,\ldots,l$~~, $1\le m_i\le m$, $i=1,\ldots,l$

n_l 是 p^l 在重集 $\{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$ 中的重数

令 $S_l=\{U\in\{V_1,\ldots V_k\}\mid \dim U=ld\}$

则 $U\in S_l\Leftrightarrow \mathcal{A}|U$ 的极小多项式是 p^l (命题6.3和6.1)

于是 $n_l=\mathrm{card}(S_l)$

下面我们来计算 $\mathrm{card}(S_l)$.

由 $V=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i$ 可知

$$V=\bigoplus_{j=1}^{m}\left[\bigoplus_{U\in S_j}U\right]$$

由引理9.3

$$p(\mathcal{A})^l(V)=\bigoplus_{j=1}^{m}\left[\bigoplus_{U\in S_j}p(\mathcal{A})^l(U)\right]$$

由第一章命题4.2

$$\dim(p(\mathcal{A})^l(V)) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{U \in S_j} \dim(p(\mathcal{A})^l(U))$$

令 $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}|_U$ 则

$$r_l = \sum_{j=1}^{m} \sum_{U \in S_j} \operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^l) \qquad (\star)$$

下面我们通过引理9.2计算 $\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^l)$.

$\mathcal{A}_U \in \mathcal{L}(U)$，$U$ 是 $\mathcal{A}_U$ 一循环的

($\because$ U 是 $\mathcal{A}$ 一不可分 $\Rightarrow$ U 是 $\mathcal{A}_U$ 不可分)

$\mathcal{A}_U$ 的极小多项式是 p^j

由引理9.2

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^l) = \begin{cases} (j-l)d, & 0 \le l < j \\ 0 & l \ge j \end{cases}$$

由$(\star)$

$$r_l = \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{U \in S_j} (j-l)d = \sum_{j=l+1}^{m} n_j (j-l) d$$

其中 $l \ge 0$

当 $l \ge 1$ 时 有

$$r_{l-1} = d\left(\sum_{j=l}^{m} n_j (j-l+1)\right) = d\left(n_l + 2n_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{m} n_j (j-l+1)\right),$$

$$r_l = d\left(n_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{m} n_j (j-l)\right)$$

$$r_{l+1} = d\left(\sum_{j=l+2}^{m} n_j (j-l-1)\right)$$

$$r_{l-1} - 2r_l + r_{l+1}$$

$$= d\left(n_l + \sum_{j=l+2}^{m} \left(n_j (j-l+1-2j+2l+j-l-1)\right)\right)$$

$$= d\, n_l$$

由此得知: $n_l = \frac{1}{d}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$. ∎

注 n_l 与我们特定选取的直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ 无关

例：设 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

计算 J_A

解 把 A 看成 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\because \chi_A = (t-\alpha)^4$

$\therefore \mu_A = (t-\alpha)^m$， m 是 $\{1,2,3,4\}$ 中某个元素. 令 $p = t-\alpha$

$r_0 = \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^0) = 4$

$r_1 = \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})) = \operatorname{rank}(A-\alpha E) = 1$

$r_2 = \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^2) = \operatorname{rank}((A-\alpha E)^2) = 0$

于是 $m = \frac{1}{\deg p}(r_0 + r_2 - 2r_1) = 4+0-2 = 2$

由此推出 $n_2 = 1$.

初等因子组是 $\{t-\alpha,\ t-\alpha,\ (t-\alpha)^2\}$

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(\alpha) & & \\ & J_1(\alpha) & \\ & & J_2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

此外 $\mu_A = (t-\alpha)^2$.

10

定理9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 的两两不同的首一的不可约因子是 $p_1, \dots, p_s \in F[t]$. 是

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \quad (*)$$

其中 $V_1, \dots V_k$ $\mathcal{A}$不可分. 令 $N(i,l)$ 是 p_i^l 在 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组的重数，其中 $i \in \{1, \dots k\}$, $l \in \mathbb{Z}^+$. 令

$$R_{i,l} = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^l)$$

其中 $i \in \{1, \dots k\}$, $l \in \mathbb{N}$. 则

$$N(i,l) = \frac{1}{\deg(p_i)}\left(R_{i,l-1} + R_{i,l+1} - 2R_{i,l}\right)$$

证：~~不妨~~验证 $s=1$ 的情形.

令 $\mathcal{S} = \{U \in \{V_1, \dots, V_k\} \mid \mathcal{A}|_U$ 的极小多项式是 p_1 的幂次$\}$

$\tilde{\mathcal{S}} = \{V_1, \dots V_k\} \setminus \mathcal{S}$

令 $W = \bigoplus_{U \in \mathcal{S}} U$, $\tilde{W} = \bigoplus_{\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{S}}} \tilde{U}$

则 $V = W \oplus \tilde{W}$.

断言1. 设 $r_l = \mathrm{rank}(p_1^l(A|_W))$,

其中 $l \in \mathbb{N}$. 则

$$N(1,l) = \frac{1}{\deg(p_1)}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l).$$

<u>断言1的证明</u>: $W = \bigoplus_{U \in S} U$ 是 $A|_W$ 不可

分子空间分解. 而 $\forall\, \tilde{U} \in \tilde{S}$, $A|_{\tilde{U}}$

的极小多项式与 p_1 互素. 于是

$N(1,l)$ 是 ~~$A|_W$~~ p_1^l 在 $A|_W$ 的 ~~单~~ 初等

因子组中的重数. 由定理9.1. 断言1成立.

断言2 $p_1(A)|_{\tilde{W}}$ 可逆

断言2的证明: 注意到 $W = V(p_1)$,

$\tilde{W} = V(p_2) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$. 由定理6.1

$p_1(A)|_{\tilde{W}}$ 可逆 断言2成立

<u>断言3</u> $\forall\, l \in \mathbb{N}$. $R_{1,l} = r_l + \dim \tilde{W}$ ⑪

<u>断言3的证明</u> $R_{1,l} = \dim(p_1(A)^l(V))$

$= \dim(p_1(A)^l(W \oplus \tilde{W}))$

$= \dim(p_1(A)^l(W) \oplus p_1(A)^l(\tilde{W}))$ (引理9.3)

$= \dim(p_1(A)^l(W)) + \dim(p_1(A)^l(\tilde{W}))$ (第一章命题)

$= \mathrm{rank}(p_1(A|_W)^l) + \underset{\dim \tilde{W}}{\cancel{\mathrm{rank}(p_1(A|_{\tilde{W}})^l)}}$ (断言2)

$= r_l + \dim \tilde{W}$ 断言3成立.

于是

$N(1,l) = \frac{1}{\deg p_1}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$ (断言1)

$= \frac{1}{\deg p_1}[R_{1,l-1} - \dim \tilde{W} + R_{1,l+1} - \dim \tilde{W} - 2(R_{1,l} - \dim \tilde{W}$ ⑫

$= \frac{1}{\deg p_1}(R_{1,l-1} + R_{1,l+1} - 2R_{1,l})$

例: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 求 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$

的 Jordan 标准型

解： $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_3} = (t+1)^2(t-1)^2$

设 $p_1 = t+1$， $p_2 = t-1$

$\mathrm{rank}(p_1(A)^0) = 4$， $\mathrm{rank}(p_1(A)) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A_1+E_2 & A_2 \\ O & A_3+E_2 \end{pmatrix}$

$= 3$

$$\mathrm{rank}(p_1(A)^2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} (A_1+E_2)^2 & * \\ O & (A_3+E_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} O & * \\ O & (A_3+E_2)^2 \end{pmatrix} = 2$$

$$N(1,1) = R_{1,0} + R_{1,2} - 2R_{1,1} = 4+2-6 = 0$$

$$\mathrm{rank}(p_1(A)^3) = \mathrm{rank}\left[\begin{pmatrix} O & * \\ O & (A_3+E_2)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1+E_2 & A_2 \\ O & A_3+E_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} O & * \\ O & (A_3+E_2)^3 \end{bmatrix} = 2$$

$$N(1,2) = R_{1,1} + R_{1,3} - 2R_{1,2} = 3+2-2\times 2 = 1$$

同样 $N(2,1) = 0$， $N(2,2) = 1$

知初等因子组 $\{(t+1)^2, (t-1)^2\}$

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(-1) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 设 $A \in M_5(\mathbb{C})$ 满足

$\mathrm{rank}(A) = 3$， $\mathrm{rank}(A^2) = 2$， $\mathrm{rank}(A+E) = 4$，

$\mathrm{rank}((A+E)^2) = 3$. 求 J_A

解： $\mathrm{rank}(A) < 5 \Rightarrow t \mid \chi_A(t)$

$\mathrm{rank}(A+E) < 5 \Rightarrow t+1 \mid \chi_A(t)$

于是 $p_1 = t$， $p_2 = t+1$ 是 $\mu_A(t)$ 的因子.

$R(1,0) = 5$， $R(1,1) = 3$， $R(1,2) = 2$

$\Rightarrow N(1,1) = 5+2-2\cdot 3 = 1$

$R(2,0) = 5$ $R(2,1) = 4$， $R(2,2) = 3$

$\Rightarrow N(2,1) = 5+3-2\times 4 = 0$ 于是

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & * & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$ * 未知

~~如果 $N(1,2)=0$. 则~~ $\mathrm{rank}(J_A) = 3 \Rightarrow$

$\because \mathrm{rank}(A) = 3$ $\therefore$ $\lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4.\ \lambda_5$ 中至少有一个是 0

又 $N(1,1) = 1$ $\therefore$ $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ 中至少有两个是 0. 但不可能多于两个, 否则 $N(2,1) \neq 0$. 于是 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ 中

~~至少有两个~~

恰好有两个是零，即

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & & \bigcirc \\ & J_2(0) & \\ \bigcirc & & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$