§10 Jordan 标准型的唯一性和应用

定理10.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 设

$$B = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} J_{l_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{l_m}(\alpha_m) \end{pmatrix}$$

是 A 在 $\mathbb{C}$ 上的两个 Jordan 标准型，则 $k=m$. 在适当调整下标后，我们有

$$d_1 = l_1, \quad \ldots, \quad d_k = l_k, \quad \lambda_1 = \alpha_1, \ldots, \lambda_k = \alpha_k$$

证：设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 则 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

由定理3.2. $\exists$ $\mathcal{A}$-不变子空间 $U_1, \cdots U_k$ 使得

$$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \quad (*)$$

令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$. ~~由 Jordan 标~~

则在 U_i 的某组基下 $\mathcal{A}_i$ 的矩阵是

$$J_{d_i}(\lambda_i).$$

由此可知 $\dim U_i = d_i$. 而 $J_{d_i}(\lambda_i)$ 的极小多项式是 $(t-\lambda_i)^{d_i}$. 于是 U_i 是 $\mathcal{A}$-不可分. 即 $(*)$ 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解. 由此可知 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组是

$$L_B = \{(t-\lambda_1)^{d_1}, \ \ldots, \ (t-\lambda_k)^{d_k}\}$$

同理 $\mathcal{A}$ 关于另一组直 $\mathcal{A}$-不可分直和分解的初等因子组是

$$L_C = \{(t-\alpha_1)^{l_1}, \ \ldots \ (t-\alpha_m)^{l_m}\}$$

（作为重集）

由定理9.2 $L_B = L_C$. 于是 $k=m$. 且适当调整下标后 $\lambda_i = \alpha_i$, $d_i = l_i$, $i=1,\ldots k$ 口

~~定理10.2~~

注：该定理对任何域都成立. 因为定理9.2如此.

定理 10.2 设 $A, B \in M_n(F)$. 则

$A \sim_s B \iff$ (i) $\mu_A = \mu_B$ (或 $\chi_A = \chi_B$)

(ii) 对于 μ_A 的任何不可约因子 p, $\mathrm{rank}(p(A)^i) = \mathrm{rank}(p(B)^i)$

$i = 0, 1, \ldots, n+1$

证: "$\Rightarrow$" 因为 $A \sim_s B$. 所以 $\mu_A = \mu_B$,

$\chi_A = \chi_B$. 设 $B = T^{-1}AT$. 则

$\forall k \in \mathbb{N}$ $B^k = T^{-1}A^kT$. 由此

$\forall f \in F[t]$ $f(B) = T^{-1}f(A)T$. 特别地

$\mathrm{rank}(f(B)) = \mathrm{rank}(f(A))$

于是 (ii) 也成立

"$\Leftarrow$" 由 (i), (ii) 和定理 9.2, A, B

对应的~~算子~~有同样的初等因子组

由定理 10.1 $J_A = J_B$ (适当调整下标)

$A \sim_s J_A$ 和 $B \sim_s J_B \Rightarrow A \sim_s B$ □

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$,

求 J_A.

解 求 A 的极小多项式 $A^0 = E$, A, $A^2 = nA$

$\mu_A = t^2 - nt = t(t-n)$

$p_1 = t$, $p_2 = t - n$

$\mathrm{rank}(A^0) = n$. $\mathrm{rank}(A) = 1$, $\mathrm{rank}(A^2) = 1$

$N(1,1) = n + 1 - 2 = n - 1$

$\Rightarrow N(2,1) = 1$. $\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix}$

另解: 由 $\mu_A = t(t-n)$ 且 $n \neq 0$ 可知

A 可以对角化. ~~由上可知~~ 由 $\mathrm{rank}(A) = 1$

得到上述 J_A.

例: 设 $A \in M_n(F)$. 证明 $A \sim A^t$

证: 由 $(A^k)^t = (A^t)^k$ 和

$t: M_n(F) \to M_n(F)$ 是线性的

$A \mapsto A^t$

可知 $\forall f \in F[t]$， $f(A)^t = f(A^t)$

特别地 $\operatorname{rank}(f(A^t)) = \operatorname{rank}(f(A)^t) = \operatorname{rank}(f(A))$

$$\chi_{A^t} = |tE - A^t| = |(tE - A)^t| = \chi_A$$

由定理 10.2 $\quad A \sim_s A^t$

例：求矩阵方程

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ 的解}$$

解法1 设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ ab + bd = 1 \\ ac + cd = -1 \\ bc + d^2 = 5 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

<u>解法2</u> 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

取 $\chi_A = \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ 1 & t-5 \end{vmatrix} = (t-4)^2$

$p = t - 4$

$r_0 = \operatorname{rank}(p(A)^0) = 2$， $r_1 = \operatorname{rank}(p(A)) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$r_2 = \operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$

$n_1 = r_0 + r_2 - 2r_1 = 0 \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$J_A = S^{-1}AS \Rightarrow SJ_A = AS$

设 $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$

由 $SJ_A = AS \Rightarrow \begin{cases} s_{11} - s_{21} = 0 \\ s_{11} - s_{21} = 0 \\ s_{11} + s_{12} - s_{22} = 0 \\ s_{12} + s_{21} - s_{22} = 0 \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{rank}=2} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取一组解 $s_{11} = s_{21} = 1$， $s_{12} = 2$， $s_{22} = 3$

$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ S 可逆 $\quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

先解方程 $Y^2=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$

设 $Y=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a^2+bc=4\\ab+bd=1\\ac+cd=0\\bc+d^2=4\end{cases}$

由 $\begin{cases}(a+d)\,b=1\\(a+d)\,c=0\end{cases} \Rightarrow c=0 \Rightarrow \begin{cases}a^2=4\\d^2=4\\(a+d)\,b=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=2\\d=2\\c=0\\b=\frac{1}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\d=-2\\c=0\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$

$Y^2=J_A \Rightarrow SY^2S^{-1}=SJ_AS^{-1}=A$

$\Rightarrow (SYS^{-1})^2=A$

$\Rightarrow X_1=S\begin{pmatrix}2&\frac{1}{4}\\0&2\end{pmatrix}S^{-1},\quad X_2=S\begin{pmatrix}-2&-\frac{1}{4}\\0&-2\end{pmatrix}S^{-1}.$

例 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 可逆

证明 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$, $\exists X\in M_n(\mathbb{C})$

使得 $X^k=A$

注. 可直接验证 $X^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 无解

证: 先设 $A=J_n(\lambda)$. $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$X^k=A=\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{\lambda}&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&\frac{1}{\lambda}\\&&&1\end{pmatrix}}_{B}$

$\left(\frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}X\right)^k=B$

由第14次作业可知. 因 $B^k\sim_s B$.

$\exists S\in GL_n(\mathbb{C})$, 使得

$S^{-1}B^kS=B$

即 $(S^{-1}BS)^k=B$ —— (*)

令 $X=\sqrt[k]{\lambda}(S^{-1}BS)$

$X^k=\lambda(S^{-1}BS)^k=\lambda B=A$

设 ~~$A = T^{-1} J_A$~~

$$A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

其中 $d_1, \dots d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

由上述结论 $\exists X_i \in M_{d_i}(\mathbb{C})$

使得 $X_i^k = J_{d_i}(\lambda_i)$, $i = 1 \dots k$

~~于是~~令

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_k \end{pmatrix}$$

则 $X^k = A$

于是 $\exists Y \in M_n(\mathbb{C})$, 使得

$$Y^k = J_A$$

且存在 $T \in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $J_A = T^{-1}AT$

由 $Y^k = T^{-1}AT \Rightarrow TY^kT^{-1} = A$

$$\Rightarrow (TYT^{-1})^k = A. \quad \blacksquare$$

总结 $F = \mathbb{C}$

$$A \sim_s J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k}$

$\mu_A = \mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \dots (t-\lambda_k)^{d_k})$

$\mu_A \mid \chi_A$ (Cayley-Hamilton 定理)

特征根 $\lambda_1, \dots \lambda_k$ 不一定两两不同

A 可对角化 $\Leftrightarrow d_1 = \dots = d_k = 1 \Leftrightarrow \mu_A$ 无重根

去年期末最后一题.

证明. 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

则 A 的以 λ 的特征值的Jordan块

有 $\dim V^\lambda$ 个. 且

$$k = \cancel{\dim(V^{\lambda})} \sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} \dim V^\lambda$$

第三章 内积空间

§1 欧氏空间

§1.1 内积.

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间.

$f: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ 是对称双线性型

使得 f 对应的二次型是正定的

双线性: $\forall\, \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z})$$

$$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$$

对称 $\quad f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$

二次型 $\quad q(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{x})$

正定 $\quad \forall\, \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\} \quad q(\vec{x})>0$

$\cancel{q(\vec{x})=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{0}}$

称 (V,f) 是一个~~内积~~欧氏空间

其中 f 是 V 上的内积.

例: $V=\mathbb{R}^n$. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\longmapsto x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

$f(\vec{x},\vec{x}) = x_1^2+\cdots+x_n^2$ (标准欧氏空间)

符号化简: 设 (V,f) 是内积空间

$\vec{x},\vec{y}\in V$

记 $f(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$ 或 $f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$

双线性性:

$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha(\vec{x},\vec{z})+\beta(\vec{y},\vec{z})$. $\quad (\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\cdot\vec{z} = \alpha\,\vec{x}\cdot\vec{z}+\beta\,\vec{y}\cdot\vec{z}$

$(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x},\vec{y})+\beta(\vec{x},\vec{z}) \quad \vec{x}\cdot(\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha\,\vec{x}\cdot\vec{y}+\beta\,\vec{x}\cdot\vec{z}$

对称

$(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}) \quad \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$

正定 $\quad \forall\, \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

$(\vec{x},\vec{x})>0 \quad \vec{x}\cdot\vec{x}>0$