<u>回忆</u>: V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维空间, $f: V\times V \to \mathbb{R}$ 对称双线性型, 且 $Q(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{x})$ 是 V 上正定二次型, 则称

(V, f) 是 n 维欧氏空间

f 称为 V 上的内积

记号 设 $\vec{x},\vec{y} \in V$

$f(\vec{x},\vec{y})$ 记做 $(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}\cdot\vec{y}$, 或 $(\vec{x}|\vec{y})$

对称性: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$

双线性: 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec{z}\in V$

$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\cdot\vec{z} = \alpha(\vec{x}\cdot\vec{z}) + \beta(\vec{y}\cdot\vec{z})$

正定性: $\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}\cdot\vec{x} > 0$

例: 标准 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \vec{x}^t\vec{y} = \vec{x}^tE\vec{y}$

命题1.1 设 V 是欧氏空间

(i) $\forall \vec{x}\in V$, $\vec{0}\cdot\vec{x} = 0$

(ii) $\vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

证 (i) $\vec{0}\cdot\vec{x} = (\vec{0}+\vec{0})\cdot\vec{x} = \vec{0}\cdot\vec{x} + \vec{0}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow \vec{0}\cdot\vec{x} = 0$

(ii) "$\Rightarrow$" 正定性 "$\Leftarrow$" 由(i)可得 ▢

注: 在本节中 V 是欧氏空间

$\vec{v}\in V$. $L_{\vec{v}}: V \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \vec{v}\cdot\vec{x}$

是线性函数. 即 $L_{\vec{v}} \in V^*$

定义: 设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_s} \in V$

$G(\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}) = (\vec{v_i}\cdot\vec{v_j})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}}$

称为 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}$ 的 Gram 矩阵.

$G(\vec{v_1},\dots,\vec{v_s})$ 是 s 阶实对称方阵

定理1.1 设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s\in V$

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s$ 线性~~相~~无关 $\Longleftrightarrow G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s)$ 满秩

证："$\Leftarrow$" $\forall i,j\in\{1,\dots,s\}$.

$$\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=L_{\vec{v}_i}(\vec{v}_j)$$

于是 $G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s)=\left(L_{\vec{v}_i}(\vec{v}_j)\right)_{s\times s}$

由第一章引理9.3. (i)与(iii)的等价性.

$G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s)$ 满秩 蕴含 $\vec{v}_1\dots\vec{v}_s$ 线性无关

"$\Rightarrow$" 设 $W=\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s\rangle$. $\dim W=s$

V上的内积也是子空间 W 上的内积,

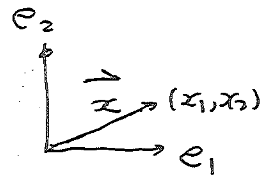
而 $G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s)$ 是该内积(双线性型)在 W 的基底 $\vec{v}_1\dots\vec{v}_s$ 下的矩阵. 由此可知 $G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_s)$ 正定. 于是满秩. ∎

§1.2 长度(范数)和距离

定义：设 $\vec{x}\in V$. $\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ 称为 $\vec{x}$ 的长度或范数. 记为 $|\vec{x}|$ 或 $\|\vec{x}\|$.

例 设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad |\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$



$$|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

例 设 $V=M_n(\mathbb{R})$. $A,B\in V$

$$(A,B)=\operatorname{tr}(AB^t)$$

可直接验证：$(\ ,\ )$ 是 V 上内积,

$$\|A\|^2=\operatorname{tr}(AA^t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

例：设 $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$．$V = \mathbb{R}_n[x]$

$\forall f, g \in V$．$(f, g) := \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

可直接验证 (f, g) 是内积．于是

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$

命题 1.2（Cauchy－Buniakowski 不等式）

设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$．$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant |\vec{x}|\,|\vec{y}|$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

证：当 $\vec{y} = \vec{0}$ 时．命题显然成立

设 $\vec{y} \neq \vec{0}$．对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$0 \leqslant (\vec{x} + \lambda \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{y})$ [正定性]

$= \vec{x} \cdot \vec{x} + 2(\vec{x} \cdot \vec{y})\lambda + (\vec{y} \cdot \vec{y})\lambda^2$ [~~对称~~双线性]

$\cancel{\because (\vec{y} \cdot \vec{y}) \neq 0}$

$= \cancel{|\vec{x}|^2 +}\ |\vec{y}|^2 \lambda^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y})\lambda + |\vec{x}|^2$

$\because |\vec{y}| \neq 0$ $\therefore \Delta = 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - 4|\vec{y}|^2 |\vec{x}|^2 \leqslant 0$

$\Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant |\vec{x}|\,|\vec{y}|$.

进而

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$|\vec{y}|^2 \lambda_0^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y})\lambda_0 + |\vec{x}|^2 = 0$$

即 $(\vec{x} + \lambda_0 \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda_0 \vec{y}) = 0$

$\vec{x} + \lambda_0 \vec{y} = \vec{0}$．$\Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ 线性相关．

由命题1.1 ☒

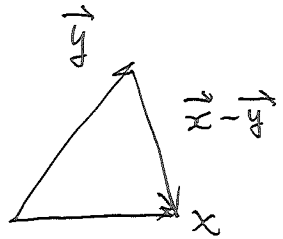
在以上三个例子中 C.B. 不等式分别变化为

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$|\operatorname{tr}(AB^t)| \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}(AA^t)}\,\sqrt{\operatorname{tr}(BB^t)}$$

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2 dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. $\vec{x},\vec{y}$ 之间的距离定义为 $|\vec{x}-\vec{y}|$.



例：设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间

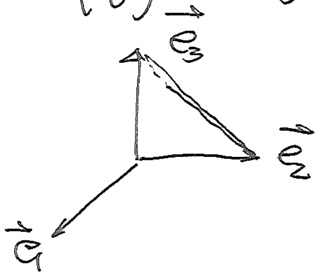
$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}-\vec{y}| = \left|\begin{pmatrix}x_1-y_1\\ \vdots\\ x_n-y_n\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

当 $n=3$ 时. 设 $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$|\vec{e_1}|=\sqrt{1}=1$$

$$|\vec{e_2}-\vec{e_3}|=\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2}$$



注 $\vec{x}\in V$. 如果 $|\vec{x}|=1$, 则称 $\vec{x}$ 是单位向量

例：设 $\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 证明 $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ 是单位向量.

证：设 $\vec{y}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

$$|\vec{y}|^2=\vec{y}\cdot\vec{y}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\frac{1}{|\vec{x}|^2}\,\vec{x}\cdot\vec{x}=\frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^2}=1 \quad ▨$$

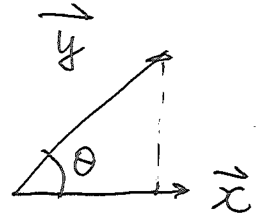
§1.3 夹角、方向和正交（垂直）

设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 由 C-S-B. 不等式

$$-1\leq\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}\leq 1$$

定义：$\vec{x},\vec{y}$ ~~在~~ $V\setminus\{\vec{0}\}$ 的夹角是

$$\theta=\arccos\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|},\quad 其中\ \theta\in[0,\pi]$$



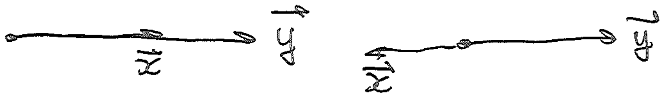
$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

当 $\vec{x}$ 是单位向量时 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ 是 $\vec{y}$ 在 $\vec{x}$ 上的"长度".

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$，$\vec{x},\vec{y}$ 的夹角为 θ

当 $\theta=0$ 时 称 $\vec{x},\vec{y}$ 是同向的

当 $\theta=\pi$ 时 ······ 反向的



例：设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$．证明

(i) $\vec{x},\vec{y}$ 同向 $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^+$，使得 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$

(ii) $\vec{x},\vec{y}$ 反向 $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^-$，使得 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$

证：考虑(ii)

"$\Rightarrow$" $\vec{x}\cdot\vec{y}=-|\vec{x}||\vec{y}|$

$\Rightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}|=|\vec{x}||\vec{y}|$

由命题1.2．$\vec{x}=\alpha\vec{y}$，$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=\alpha\cdot\vec{x}\cdot\vec{x}=-|\alpha|\vec{x}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow \alpha=-|\alpha| \Rightarrow \alpha<0$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=\alpha\vec{y}\cdot\vec{y}$

$\Rightarrow$

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\alpha|\vec{y}|^2}{|\alpha||\vec{y}|^2}=-1$$

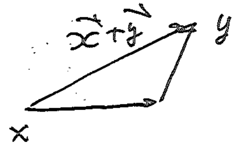
~~定义：$\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$~~

例（三角不等式）设 $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

则 $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$

且 等式成立 当且仅当 $\vec{x},\vec{y}$ 同向

证：
$$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$
$$=\vec{x}\cdot\vec{x}+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{y}$$
$$=|\vec{x}|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2$$
$$\leq|\vec{x}|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|+|\vec{y}|^2$$
$$=(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$$



于是 $|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$

由上述推导可知 等号成立

$\Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|$

$\Leftrightarrow \vec{x}=\alpha\vec{y}$ 且 $\alpha>0$ （命题1.2 和直接计算）

定义：设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$，如果 $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{0}$

则称 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 正交（垂直），记为 $\vec{x} \perp \vec{y}$

注：由命题1.1 (i)，$\vec{0}$ 与任何向量都正交

若 $\vec{x}, \vec{y} \in V\setminus\{\vec{0}\}$，$\vec{x}, \vec{y}$ 正交 $\Leftrightarrow$

$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

例：设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j, \quad j = 1, 2, \dots n$$

则 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 两两正交.

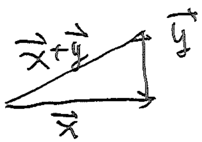
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0\cdot 0 + \dots + 0\cdot 0 + \underset{i}{1\cdot 0} + \dots + \underset{j}{0\cdot 1} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{cases}$$

$$= \delta_{ij}.$$

于是当 $i \neq j$ 时，$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \Rightarrow \vec{e}_i \perp \vec{e}_j$

例（勾股定理）设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$，$\vec{x} \perp \vec{y}$

则 $|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$



证：$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$

$= \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ ☒

§1.4 单位正交基

定义：设 V 是 n 维欧氏空间，$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基. ~~如果~~

(i) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 两两正交

(ii) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 都是单位向量.

则称 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基.

注：(i), (ii) 可简述为 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$i, j \in \{1, \dots, n\}$

命题1.3 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的 ~~一组基~~ 单位正交基 则

(i) $\forall \vec{x} \in V \quad \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \dots + (\vec{x}\cdot\vec{e}_n)\vec{e}_n$

(ii) 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

证：(i) 设 $\vec{x}=\alpha_1\vec{e_1}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}$

$$\vec{e_i}\cdot\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{e_j}\cdot\vec{e_i}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_{ij}=\alpha_i$$

(ii) $$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{e_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\delta_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\delta_{ii}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$ ▨

~~命题~~

例：设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_s}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ 两两正交

证：$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_s}$ 线性~~相~~无关

证：法1. 设 $\alpha_1,\cdots\alpha_s\in\mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_s\vec{v_s}=\vec{0}$$

$$\vec{v_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\vec{v_j}\right)=0$$

于是 $\sum_{j=1}^{s}\alpha_j(\vec{v_i}\cdot\vec{v_j})=0\Rightarrow\alpha_i(\vec{v_i}\cdot\vec{v_i})=0$

$\because\ \vec{v_i}\cdot\vec{v_i}\neq0\quad\therefore\ \alpha_i=0$. ▨

注2 $$G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_s})=\begin{pmatrix}\vec{v_1}\cdot\vec{v_1}&&\\&\ddots&\\&&\vec{v_s}\cdot\vec{v_s}\end{pmatrix}$$

$\because\ \vec{v_i}\cdot\vec{v_i}\neq0\quad\therefore\ G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_s})$ 满秩

$\therefore\ \vec{v_1},\cdots\vec{v_s}$ 线性无关 (定理1.1)

定理1.2 (Gram–Schmidt 正交化)

设 V 是 n 维欧氏空间，则 V 有单位正交基

证：设 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基

设 $\vec{e_1}=\dfrac{\vec{\varepsilon_1}}{|\vec{\varepsilon_1}|}$ (单位化) 则 $\langle\vec{\varepsilon_1}\rangle=\langle\vec{e_1}\rangle$

假设 $1\le k<n$ 且已经构造了两两正交的单位向量 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k}$，使得

$$\langle\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_k}\rangle=\langle\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k}\rangle$$

令 $$\vec{e}\,'_{k+1}=\vec{\varepsilon}_{k+1}-(\vec{e_1}\cdot\vec{\varepsilon}_{k+1})\vec{e_1}-\cdots-(\vec{e_k}\cdot\vec{\varepsilon}_{k+1})\vec{e_k}$$ (*)

则 $\forall i\in\{1,\cdots k\}$

$$\vec{e_i}\cdot\vec{e}\,'_{k+1}=\vec{e_i}\cdot\vec{\varepsilon}_{k+1}-\vec{e_i}\cdot\vec{\varepsilon}_{k+1}=0$$

即 $\vec{e}_{k+1}' \perp \vec{e}_i$, $i=1,\dots k$.

令 $\vec{e}_{k+1} = \frac{\vec{e}_{k+1}'}{|\vec{e}_{k+1}'|}$. 则

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$ 两两正交

由 (*) $\vec{\varepsilon}_{k+1} \in \langle \vec{e}_1, \dots \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1} \rangle$ 且

$\vec{e}_{k+1} \in \langle \vec{e}_1, \dots \vec{e}_k, \vec{\varepsilon}_{k+1} \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k, \vec{\varepsilon}_{k+1} \rangle$

(归纳假设.

于是我们得到

(i) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$ 两两正交

(ii) $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1} \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k, \vec{\varepsilon}_{k+1} \rangle$

该过程可继续至 $k=n$. 证

注: 上述证明称之为 Gram-Schmidt 正交化. 在这一计算过程中有

$\langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k \rangle = \langle \vec{e}_1, \dots \vec{e}_k \rangle$

$k=1,2,\dots n$

于是 $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n) A$ (8)

其中 A 是上三角的.

例 设 $V = \mathbb{R}^4$, 标准欧氏空间

设 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 且

$U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$

(i) 计算 U 的一组~~正交基~~ 单位正交基

~~(ii) 把 U 的一组单位正交基扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组单位正交基~~

解 $\dim U = \operatorname{rank}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 3$

$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2' = \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{|\vec{e}_2'|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_3' = \vec{u}_3 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2$

$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_3'}{|\vec{e}_3'|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

于是 U 的一组单位正交基是

$$\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{e_3}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

§1.5 正交矩阵

设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 与 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的两组单位正交基，$A\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})A$$

则 $\vec{\varepsilon_j}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\vec{A^{(j)}}$, $j=1,2,\cdots n$

$$\delta_{ij}=\vec{\varepsilon_i}\cdot\vec{\varepsilon_j}=\left(\vec{A^{(i)}}\right)^t\vec{A^{(j)}}$$

$$=\vec{A^t_i}\cdot\vec{A^{(j)}},\quad i,j\in\{1,2,\cdots n\}$$

即 $A^tA=E$

由此可知 $A^t=A^{-1}$

定义：设 $A\in GL_n(\mathbb{R})$. 如果 $A^t=A^{-1}$, 则称 A 是正交矩阵.

定理 1.3 设 V 的一组单位正交基是 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$, $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的另一组基，$A\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})A$$

则 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow$ A 是正交阵

证："$\Rightarrow$" 在引入正交矩阵定义时已证

"$\Leftarrow$" $\vec{\varepsilon_j}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\vec{A^{(j)}}$

$$\vec{\varepsilon_i}\cdot\vec{\varepsilon_j}=\vec{A^{(i)}}^t\vec{A^{(j)}}=\vec{A^t_i}\vec{A^{(j)}}$$

$\because$ $A^tA=E$ $\therefore$ $\vec{A^t_i}\cdot\vec{A^{(j)}}=\delta_{ij}$

由此可知，$\vec{\varepsilon_i}\cdot\vec{\varepsilon_j}=\delta_{ij}$ $\square$

例：一阶正交阵 (a) $\quad (a)^t(a)=(1)$

$\Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1.$

二阶正交群

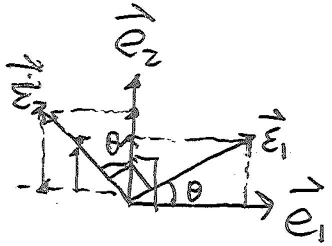
$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_2^t A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

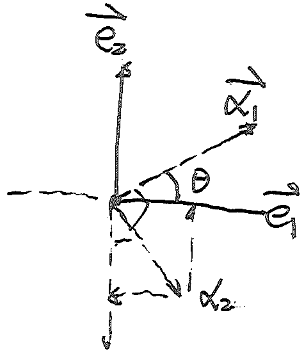
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

类似地可验证 $B_2^t B_2 = E_2$

$\mathbb{R}^2$ 中 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{A_2}$$



$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{B_2}$$

$\alpha_1 = \vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\alpha}_2 = -\vec{\varepsilon}_2$

例 $A \in GL_n(\mathbb{R})$ 正交 $\Leftrightarrow$ $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 ∵ $\vec{A}^{(i)} \cdot \vec{A}^{(j)}$ 通常内积

$\vec{A}^{(i)} \cdot \vec{A}^{(j)} = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)} = A_i^t \cdot \vec{A}^{(j)} = \delta_{ij}$

命题 1.3 设 A 是正交矩阵

则 (i) $|A| = \pm 1$

(ii) A^t 即 A^{-1} 也正交

(iii) 再设 B 是正交矩阵，则 AB 也是

证：(i) $A^t A = E \Rightarrow \det(A^t A) = 1$

$\Rightarrow \det(A^t)\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A)^2 = 1$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1$

(ii) $A^t = A^{-1} \Rightarrow A A^t = E \Rightarrow (A^t)^t A^t = E$

$\Rightarrow A^t$ 正交

(iii) $(AB)^t (AB) = B^t \underbrace{A^t A}_{E} B = B^t B = E$ ▨

推论 1.1 令

$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A 是正交矩阵 \}$

则 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

证：由上学期第四章命题 2.2.

只要证明

$A, B \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

由命题 1.3 (ii) (iii) 这是显然的 ▨

注：称 $O_n(\mathbb{R})$ 为正交矩阵群

§1.6 正交相似

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$；$\vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的两组基，且

$$(\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) P.$$

由定理 1.3，$P \in O_n(\mathbb{R})$

设 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A
在 $\vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 B

由第二章 §2.1. $B = P^{-1}AP = P^tAP$

定义：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. ~~如果存在~~
$P \in O_n(\mathbb{R})$，使得

$$B = P^{-1}AP$$

则称 B 与 A 正交相似，记为 $A \sim_o B$

命题1.4. $\sim_s$ 是等价关系

证：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = E^tAE$
$\Rightarrow A \sim_o A$ 自反性成立

设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_o B$. 则
$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$，使得

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PAP^{-1}$$

$\because P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. $\therefore B \sim_o A$.

设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 使得
$A \sim_o B$，$B \sim_o C$

则 $\exists P, Q \in O_n(\mathbb{R})$，使得
$B = P^tAP$，$C = Q^tBQ$

于是 $C = Q^tP^tAPQ = (PQ)^tAPQ$

$\because PQ \in O_n(\mathbb{R})$ $\therefore A \sim_o C$ $\square$

注：$A \sim_o B \Rightarrow A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$
但反之不成立

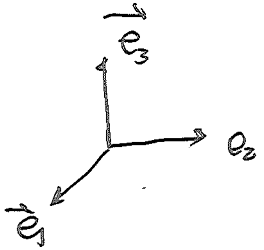
~~例. 证明上例中 A_2，B_2 不正交相似~~

问题：给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 求
A 在正交相似下的标准型

§1.7 正交补

定义：设 $U \subset V$ 是子空间，U 的正交补是 $U^{\perp} = \{\vec{v} \in V \mid \forall \vec{u} \in U,\ \vec{u} \perp \vec{v}\}$

例：



$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle^{\perp} = \langle \vec{e}_3 \rangle$

$\langle \vec{e}_3 \rangle^{\perp} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$

命题 ~~定理~~ 1.5 设 $U \subset V$ 是子空间，则

(i) $U^{\perp}$ 是子空间

(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$

(iii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

证：(i). 设 $\vec{v}, \vec{w} \in U^{\perp}$，$\alpha, \beta \in F$

$\forall \vec{u} \in U \quad (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \cdot \vec{u}$

$= \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{u} + \beta\, \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in U^{\perp}$

$U^{\perp}$ 是子空间

(ii) 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$ 是 U 的一组基，把它扩充为 V 的一组基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$ 对这组基实施 Gram–Schmidt 正交化得到 V 的单位正交基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$

满足 $U = \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d \rangle$

$\forall \vec{e}_j \in \{\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n\}$. $\vec{e}_j \perp \vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots d$

则 $\vec{e}_j$ 垂直于 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$ 的任何线性组合. 于是 $\vec{e}_j \in U^{\perp}$. 由此可知

$\dim U^{\perp} \geq n-d$

设 $\vec{v} \in U \cap U^{\perp}$. 则 $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = 0$ （命题1.1）

$\dim(U + U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} \geq d + n - d \geq n$

于是 $\dim U^{\perp} = n-d$ 且

$V = U \oplus U^{\perp}$

(iii) 设 $\dim U = d$. 则 $\dim U^{\perp} = n-d$ (∵(ii))

$\Rightarrow (U^{\perp})^{\perp}$ 的维数是 d

∵ $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ ∴ $U = (U^{\perp})^{\perp}$ ☒

例: 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

求 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基 $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4}$

使得 $\langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle = \langle \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \rangle$

解: 由前例: $\vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon_3} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

下面计算 $\vec{w} \in U^{\perp} \setminus \{\vec{0}\}$ 即

设 $\vec{w} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$. $\vec{w} \in U^{\perp} \Leftrightarrow \vec{w}\cdot\vec{u_1} = \vec{w}\cdot\vec{u_2} = \vec{w}\cdot\vec{u_3} = 0$

即
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{w} \in \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle. \Rightarrow \vec{\varepsilon_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

推论1.2. 设 $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_s} \in V$ 两两正交 ⑬

则 ∃ $\vec{v}_{s+1}, \cdots \vec{v_n} \in V$. 使得

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_s}, \vec{v}_{s+1}, \cdots \vec{v_n}$ 是 V 的一组基

且两两正交.

证: 设 $U = \langle \vec{v_1}, \cdots \vec{v_s} \rangle$. 由命题1.3后的例

子可知. $\dim U = s$. 由命题1.5 (ii)

$\dim U^{\perp} = n-s$.

由定理1.2 $U^{\perp}$ 有一组基 $\vec{v}_{s+1}, \cdots \vec{v_n}$, 两两正交

由命题1.5 (ii) $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_s}, \vec{v}_{s+1}, \cdots \vec{v_n}$

是 V 的一组基且 $\vec{v_i} \perp \vec{v_j}$. $i, j \in \{1, \cdots n\}$, $i \neq j$

☒

例: 设 W 是 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^3$

中的解空间. 求 $W^{\perp}$ 的一组单

位正交基

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{\perp} = \langle \underset{\vec{\varepsilon}_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}, \underset{\vec{\varepsilon}_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}} \rangle$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \vec{\varepsilon}_2 - (\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2^{\circ} = \frac{\vec{e}_2'}{|\vec{e}_2'|} = \frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

§2 正规算子与正规矩阵

§2.1 伴随算子.

定义：设 V 是 n 维欧氏空间，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

设 $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{y})$$

则称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

伴随算子的来源：

$$\varphi: V \longrightarrow V^*$$
$$\vec{v} \longmapsto L_{\vec{v}}$$

其中 $L_{\vec{v}}: V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$$

~~在~~由内积的双线性可知

$L_{\vec{v}} \in V^*$ 且 φ 是线性映射

$\varphi(\vec{v}) = 0^* \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V \quad L(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{x} = 0$

于是 $\vec{v} = \vec{0}$. 由此可知 φ 是线性同构

设 $\hat{\mathcal{A}}: V^* \longrightarrow V^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的对偶算子

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & V^* \arrow[d, "\hat{\mathcal{A}}"] \\ & V^* \arrow[ul, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}\circ\hat{\mathcal{A}}\circ\varphi$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

定理 2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一

(ii) 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组标准正交基

且 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A.

则 其伴随算子在该基下的矩阵

是 A^t

证: 设 $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 由公式

$$(\mathcal{A}^*(\vec{e}_1)\cdots\mathcal{A}^*(\vec{e}_n))=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A^t$$

所确定

$$\mathcal{A}^*(\vec{e}_i)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\overrightarrow{(A^t)}^{(i)}$$

$$=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\left(\overrightarrow{A_i}\right)^t$$

$$\mathcal{A}^*(\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_j=\overrightarrow{A_i}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-j$$

类似

$$\vec{e}_i\cdot\mathcal{A}(\vec{e}_j)=\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\overrightarrow{A}^{(j)}$$

$$=(0\cdots0\underset{i}{1}0\cdots0)\overrightarrow{A}^{(j)}$$

$$\because\ \overrightarrow{A_i}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-j=(0\cdots0\underset{i}{1}0\cdots0)\overrightarrow{A}^{(j)}$$

$$\therefore\ \mathcal{A}^*(\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_j=\vec{e}_i\cdot\mathcal{A}(\vec{e}_j)\qquad(\star)$$

设 $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i,\ \vec{y}=\sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j$

$$\mathcal{A}^*(\vec{x})\cdot\vec{y}=\left(\sum_{i=1}^n x_i\,\mathcal{A}^*(\vec{e}_i)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n y_j\,\vec{e}_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n x_iy_j\,\mathcal{A}^*(\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_j$$

同理

$$\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{y})=\sum_{i=1}^n x_iy_j\,\vec{e}_i\cdot\mathcal{A}(\vec{e}_j)$$

由 $(\star)$ $\quad\mathcal{A}^*(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$.

即 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.