回忆：

定理 8.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则

(i) $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一

(ii) 设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组单位正交基，且 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 下的矩阵是 A，则其伴随算子在该基下的矩阵是 A^t

证：设 $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 由关系

$$(\mathcal{A}^*(\vec{e_1}),\cdots,\mathcal{A}^*(\vec{e_n}))=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})A^t \text{ 确定}$$

$$\mathcal{A}^*(\vec{e_i})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\,\overrightarrow{(A^t)}^{(i)}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})(\vec{A_i})^{(t)}$$

(☆) $$\mathcal{A}^*(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=\cancel{\mathcal{A}}(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})(\vec{A_i})^{(t)}\begin{array}{c} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \cdots j\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\vec{A_i}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \cdots j\\ \\ \\ \\ \end{array}=a_{ij}\text{，其中 } A\doteq(a_{ij})_{n\times n}$$

同理 $$\vec{e_i}\cdot\mathcal{A}(\vec{e_j})=\begin{array}{c} i\\ (0\cdots0\ 1\ 0\cdots0)\end{array}\vec{A_j}$$

$$=a_{ij}\qquad(☆☆)$$

即：$\mathcal{A}^*(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=\vec{e_i}\cdot\mathcal{A}(\vec{e_j})=a_{ij}$ ①

$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$

设 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$

$$\mathcal{A}^*(\vec{x})\cdot\vec{y}=\mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\right)\cdot\vec{y}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^n x_i\,\mathcal{A}^*(\vec{e_i})\right]\cdot\left(\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \cancel{\mathcal{A}}\,x_i y_j\,\mathcal{A}^*(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$$

同理 $$\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{y})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$$

于是 $$\mathcal{A}^*(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$$

即 $\mathcal{A}^*$ 是伴随算子。

由此证明 $\mathcal{A}^*$ 的存在性和 (i)

唯一性

设 $\mathcal{B}^*\in\mathcal{L}(V)$ 是 $\mathcal{A}$ 的另一个伴随算子

则 $$\mathcal{B}^*(\vec{e_i})\cdot\vec{e_j}=\vec{e_i}\cdot\mathcal{A}(\vec{e_j})\underset{(☆☆)}{=}a_{ij}$$

由命题1.3 (i)，$\mathcal{B}^*(\vec{e_j})$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的第 i 个坐标是 a_{ij}，于是 $\mathcal{B}^*$ 在 ~~该基~~ $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵也是 A^t. 从而 $\mathcal{A}^*=\mathcal{B}^*$. ▨

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子. 如果 $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}$. 则称 $\mathcal{A}$ 是正规(normal)算子.

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t=A^tA$. 则称 A 是正规矩阵

注：由定理2.1和第2章的定理2.1可知 $\mathcal{A}$ 是正规算子当且仅当 $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵是正规的

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 如果 A 是正交的，或对称的，或者斜对称的. 则 A 是正规的

证：设 A 是正交的. 则 $A^tA=E$ 于是 $AA^t=E$. 由此可知. A 正规

设 A 是斜对称的. 则 $A^t=-A$

设 A 是斜对称的. 则 $A^t=-A$ 于是 A 正规

$A^tA=-A^2=AA^t$. 于是 A 正规

类似. 当 $A=A^t$ 时. A 正规.

引理2.1. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 如果 $tr(AA^t)=0$. 则 $A=O_{m\times n}$

证：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $AA^t=(b_{kl})_{m\times m}$

$$b_{kk}=\vec{A_k}\,\overrightarrow{(A^t)^{(k)}}=\vec{A_k}\left(\vec{A_k}\right)^t$$

$$\cancel{=(a_{k1},\dots,a_{kn})\begin{pmatrix}a_{k1}\\ \vdots\\ a_{kn}\end{pmatrix}=\sum_k a_{kl}^2}$$

$$=(a_{k1},\dots,a_{kn})\begin{pmatrix}a_{k1}\\ \vdots\\ a_{kn}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n a_{kj}^2$$

$$tr(AA^t)=\sum_{k=1}^m b_{kk}=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n a_{kj}^2$$

$$tr(AA^t)=0 \iff a_{kj}=0,\quad \begin{matrix}k=1\dots m\\ j=1\dots n\end{matrix}$$

▨

（第九周 第5题）

Lemma 2.2 引理 (见科斯特利金书 p64. 定理7)

设 W 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间, $n > 0$. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 W 有 1 维或 2 维不变子空间

证: 由 $\mathbb{R}[x]$ 中的因式分解可知

$\mu_{\mathcal{A}}(t) = p(t) q(t)$, 其中 $p, q \in \mathbb{R}[t]$

且 $\deg(p) \leq 2$. 于是 $\deg q < \deg \mu_{\mathcal{A}}$.

从而 $\exists \vec{x} \in W$. 使得 $\vec{y} = q(\mathcal{A})(\vec{x}) \neq \vec{0}$

设 $U = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{y}$. 因为 ~~p(A)(y)~~

$p(\mathcal{A})(\vec{y}) = p(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{x}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{x}) = \vec{0}$

于是 ~~dim U ≤ 2. (见~~ $\deg \mu_{\mathcal{A},\vec{y}} \mid p$

$\Rightarrow \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{y}} \leq 2 \Rightarrow \dim U \leq 2$

[见 ~~命题~~ 第二章命题 5.4 (ii)]

而由第二章命题 5.3 (i), U 是 $\mathcal{A}$-子空间 ▨

引理 2.3 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是正规的

~~则~~ 如果 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 \in M_d(\mathbb{R})$,

$A_2 \in \mathbb{R}^{d \times n-d}$, $A_3 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$, $0 < d < n$,

则 $A_2 = 0$

证: 因为 $A^t A = A A^t$, 所以

$$\begin{pmatrix} A_1^t & 0 \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^t & 0 \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}$$

$$A_1^t A_1 = A_1 A_1^t + A_2 A_2^t$$

$$\mathrm{tr}(A_1^t A_1) = \mathrm{tr}(A_1 A_1^t + A_2 A_2^t) = \mathrm{tr}(A_1 A_1^t) + \mathrm{tr}(A_2 A_2^t)$$

$\because \mathrm{tr}(A_1^t A_1) = \mathrm{tr}(A_1 A_1^t)$ [$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$]

$\therefore \mathrm{tr}(A_2 A_2^t) = 0$

由引理 2.1. $A_2 = 0$ ▨

~~引~~ 引理2.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 如果 $U\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间. 则 $U^\perp$ 也是.

证: 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基

则由命题 1.5 (ii), $\dim U^\perp = n-d$.

设 $U^\perp$ 的一组~~基~~单位正交基是 $\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$. 其中 $n=\dim V$. 由此可知

$$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\ \vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基. 在这组下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_3\end{pmatrix}$, 其中

$A_1\in M_d(\mathbb{R})$, $A_2\in\mathbb{R}^{d\times(n-d)}$, $A_3\in M_{n-d}(\mathbb{R})$

且 A 正规: 由引理2.3. $A_2=O_{d\times(n-d)}$

于是 $A=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_3\end{pmatrix}$.

由第二章定理3.2, $U^\perp$ 是 $\mathcal{A}$ 不变的. □

~~模~~其证明
段

引理2.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 $\mathcal{A}$-不可分子空间 $U_1,\dots,U_l$ 使得

(i) $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_l$

(ii) $\forall\, i,j\in\{1,\dots,l\}$, $i\neq j$

$U_i\perp U_j$ (即 $\forall\, \vec{u}_i\in U_i, \vec{u}_j\in U_j$, $\vec{u}_i\perp\vec{u}_j$)

(iii) $0<\dim U_i\leq 2$

证: 设 $n=\dim V$. 对 n 归纳

当 $n=1$ 时. ~~定理~~引理显然成立

当 $n=2$ 时. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-不可分, 则定理成立. 否则 ~~$\mathcal{A}$~~ V 有一个一维不变子空间 U. 由引理2.4. $U^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的. 由命题 1.5(ii)

$$V=U\oplus U^\perp$$

~~定理~~引理成立.

设 $\dim V<n$ 时引理成立. 考虑 $\dim V=n$ 且 $n\geq 3$ 的情形

由引理 2.2 V 有一个 $\mathcal{A}$-不变子空间 U，其维数为 1 或 2. 由引理 2.4，$U^\perp$ 是 $\mathcal{A}$ 不变的.
由 命题 1.5 (ii)

$$V = U \oplus U^\perp$$

设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d$ 是 U 的单位正交基，$\vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n$ 是 $U^\perp$ 的单位正交基. 则 $\mathcal{A}$ 在 U 的单位正交基 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d$，$\vec{e}_{d+1}, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1 \in M_d(\mathbb{R})$，$A_2 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$. 因为 $AA^t = A^tA$，

所以 $A_iA_i^t = A_i^tA_i$，$i=1,2$.

即 $\mathcal{A}|_U$ 和 $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ 都是正规的

对 $\mathcal{A}|_U$，U 用 $n=1,2$ 时的结论

对 $\mathcal{A}|_{U^\perp}$，$U^\perp$ 用归纳假设.

$\boxed{}$

引理成立

⑤

例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\dim V = 1$.
证明 $\mathcal{A}$ 正规

证：设 $V = \langle \vec{x} \rangle$ $|\vec{x}|=1$

$\mathcal{A}(\vec{x}) = \alpha \vec{x}$ $(\alpha)(\alpha)^t = (\alpha^2) = (\alpha)^t(\alpha)$ $\boxed{}$

例 设 $\dim V = 2$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规
$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是 V 的一组基. ~~如果 $\mathcal{A}$ 不可分~~ 的

则 $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，其中 $\beta \neq 0$，使得 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

证：设 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

由 $A^tA = AA^t$ 得

$$(*)\quad \begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 & \text{--- ①} \\ ab+cd = ac+bd & \text{--- ②} \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 & \text{--- ③} \end{cases}$$

由① 可得 $c^2=b^2 \Rightarrow c=b$ 或 $c=-b$

情形1 $c=b$. 则 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\chi_A = t^2+(a+d)t+(ad-b^2)$$

$$\Delta = (a-d)^2+4b^2 \geqslant 0$$

于是 χ_A 有实特征根 $\Rightarrow \mathcal{A}$ 有实特征向量 $\Rightarrow V$ 有1维不变子空间

$\Rightarrow V$ 是 $\mathcal{A}$-可分的（~~命题1.5~~ 和 引理2.4）

情形2 $c=-b$ 且 $b\neq 0$

由② $2ab=2bd \Rightarrow a=d$

令 $a=\alpha$. $b=\beta$ 得

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ \beta\neq 0$$

可见 由(☆) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ 正规 $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

定义：设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\beta\neq 0$. 记

$N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$，称为一个2阶正规块

注 $N_2(\alpha,\beta)$ 无实特征根

~~引理2.6 设 $N_2(\alpha$~~

定理2.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基

$\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e}_{2s-1},\vec{e}_{2s},\vec{e}_{2s+1},\cdots,\vec{e_n}$

使得在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & N_2(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

由引理2.5

$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_s\oplus U_{2s+1}\oplus\cdots\oplus U_n$

$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_s$ 是2维 $\mathcal{A}$ 不变子空间

其中 $U_1,\cdots,U_s$ 是2维，

$U_{2s+1},\cdots U_n$ 是一维的 - - - -

且 $U_i\perp U_j$ ($i\neq j$).

设 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基. $i=1,2,\dots,s$

则 $\mathcal{A}|_{U_i}$ 在 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 下的矩阵为

$N(\alpha_i, \beta_i)$ (引理2.6)

设 $\vec{e}_j$ 是 U_j 中单位向量. $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$

$(j = 2s+1, \dots, n)$

则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2s-1}, \vec{e}_{2s}, \vec{e}_{2s+1}, \dots, \vec{e}_n$

是 U 的一组单位正交基. 于是 $\mathcal{A}$

在这组基下的矩阵如 A 所示 ▢

~~推论2.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 正规~~

定理2.3 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 正规 则

$$A \sim_o \begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & N_s(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & 0 & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$

其中, $\alpha_1, \beta_1, \dots \alpha_s, \beta_s \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \dots \beta_s \neq 0$, $\lambda_{2s+1}, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

证: $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

其中 $\mathbb{R}^n$ 的标准欧氏空间

则 $\mathcal{A}$ 在标准基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A,

$\because \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是单位正交基

~~$\therefore \mathcal{A}$ 是正规算子. (见定理2.1的证明)~~

~~由定理2.2~~

由定理2.1, 及其证明 $\mathcal{A}^*$ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. $\because AA^t = A^tA$

即 $\therefore \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ 正规.

由定理2.2. $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵为 B. 由§1.6开始部分可知 $A \sim_o B$ ▢

~~§3. 正规矩阵标准型的应用~~

~~§3.1 正交算子~~

~~定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$~~

~~$\vec{x} \cdot \vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \mathcal{A}(\vec{y})$~~

~~则称 $\mathcal{A}$ 是正交算子 (保内算子)~~

§3. 特殊正规矩阵

§3.1 实对称矩阵

一阶矩阵都对称

二阶正规块 $N(\alpha,\beta)$ 不是对称的.($\because \beta\neq 0$)

定理3.1 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. ~~如果~~对称

则
$$A \sim_o \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是 A 的特征根.(不必两两不同) 特别地, 实对称矩阵的特征根都是实数.

证: 因为 A 对称, 所以 A 正规

由定理2.2

$$A \sim_o \underbrace{\begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & N_2(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \alpha_{2s+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}}_{B}$$

即 $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$, 使得

$$B = P^t A P$$

于是 B 对称 $\Rightarrow N_2(\alpha_1,\beta_1),\dots N_2(\alpha_s,\beta_s)$ 也对称. $\rightarrow\leftarrow$

从而 $s=0$ $\quad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

因为 $P^t=P^{-1}$, 所以 $B\sim_s A$. 于是 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是 A 的特征根

推论3.1 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 对称

(i) ~~如果~~ A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征根都是正实数

(ii) ~~如果~~ A 半正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征根都是非负实数

证: (i) 因为 $A\sim_o \mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) =: B$

所以 ~~B正定~~ $A\sim_c B$. 于是 B 正定

$\Rightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}^+$.

(ii) 类似

§3.2 斜对称矩阵

一阶 实斜对称矩阵 (0)

$N_2(\alpha,\beta)$ 是斜对称 $\Longleftrightarrow$ $\alpha=0$

定理 3.2 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 斜对称

则
$$A\sim_o \underbrace{\begin{pmatrix} N_2(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

其中 $\beta_1,\cdots\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 特别地 A 的特征根都是纯虚数 (包括 0)

证: 与定理 3.1 证明类似 $A\sim_o B$

于是 $\chi_A=\chi_B=(t^2+\beta_1^2)\cdots(t^2+\beta_s^2)\,t^{n-2s}$

由此可知 A 的特征根是

$\pm\beta_1\sqrt{-1},\ \cdots,\ \pm\beta_s\sqrt{-1}$. 和 0.

§3.3 正交矩阵

一阶: (1) (-1)

~~二阶~~

设 $N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ 是正交矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & 0\\ 0 & \alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\alpha^2+\beta^2=1$ ~~其~~ 且 $\beta\neq 0$ $\quad\theta\in(0,\pi)$

令 $\alpha=\cos\theta$. 则 $\beta=\sin\theta$.

$$N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

定理 3.3 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正交

则
$$A\sim_o \underbrace{\begin{pmatrix} N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & \bigcirc & \\ & & N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & \\ & \bigcirc & & E_k & \\ & & & & -E_l \end{pmatrix}}_{=:B}$$

证: 由定理 2.2

$$A\sim_o \underbrace{\begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \bigcirc & \\ & & N_2(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{C}$$

于是 $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得

$$C = P^t A P$$

由命题1.3. C正交. 于是

$N_2(\alpha_i, \beta_i)$ 和 (λ_j) 都正交, 其中

$i=1,2,\ldots,s$. $j=2s+1,\ldots,n$. 由此可知

$N_2(\alpha_i, \beta_i) = N_2(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$, $\lambda_j = \pm 1$

在适当调整下就有 $A \sim_o B$ ☒

推论3.2 正交矩阵在复数域中的特征根模长为1

证: 回忆: $z \in \mathbb{C}$, z 的模长为 $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$

由定理3.3 只要证

$N_2(\cos\theta, \sin\theta)$ 的特征根模长等于1

$$\chi_{N_2(\cos\theta, \sin\theta)} = \begin{vmatrix} t-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t-\cos\theta \end{vmatrix}$$

$= (t-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$\Rightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sin\theta \sqrt{-1}$

$\Rightarrow |\lambda| = 1.$ ☒

§4 特殊线性算子

§4.1 (斜)对称算子

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ $(\mathcal{A}^* = -\mathcal{A})$

则称 $\mathcal{A}$ 是对称(斜对称)算子

命题4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则

$\mathcal{A}$ 是对称(斜对称)算子 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任一组单位正交基下的矩阵是对称(斜对称)的

证: 只考虑对称情形, 斜对称类似.

设 $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. 设 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则

$\mathcal{A}^*$ 在 $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A^t

$\mathcal{A}$ 对称 $\Longleftrightarrow$ ~~$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$~~ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$

~~$A^t A = A A^t$~~ $A^t = A$

$\Longleftrightarrow$ A 对称 ☒

命题4.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称（斜对称）

(i) $\mathcal{A}$ 的特征根都是实数（纯虚数）

(ii) 在 V 的某组单位正交基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_s \\ \beta_s & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

对称　　　　斜对称

其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1,\cdots\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

证：由定理2.1 (ii) 和定理3.1（定理3.2）直接导出。

命题4.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, α,β 是 $\mathcal{A}$ 的特征根 且 $\alpha\neq\beta$. 则 $V^\alpha\perp V^\beta$

证：设 $\vec{u}\in V^\alpha$, $\vec{v}\in V^\beta$

~~$\vec{u}\cdot\vec{v}$ =~~ $\mathcal{A}(\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\mathcal{A}(\vec{v})$

$\mathcal{A}(\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\beta\vec{v}$

于是 $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$. $\because \alpha\neq\beta$

$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$ □

例：设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

求正交矩阵 T，使得 T^tAT 是对角阵

解 $\chi_A = |tE-A| = (t-1)^3(t+3)$

两个特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$

V^{λ_1} 是 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{GS}{=\!=} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

V^{λ_2} 是 $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

$$V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{GS}{=} \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$ □

§4.2 正交算子

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，如果 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x})$$

则称 $\mathcal{A}$ 是正交算子（保内算子）

命题 4.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则下列~~命题~~结论等价

(i) $\mathcal{A}$ 是正交算子

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的任一组单位正交基下的矩阵正交

(iii) $\forall \vec{x}\in V$ $\quad \|\vec{x}\| = \|\mathcal{A}(\vec{x})\|$.

证：(i) ⇒ (ii) 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的单位正交基

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\dots \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A$$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_i)\cdot\mathcal{A}(\vec{e}_j) = [(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\overrightarrow{A}^{(i)}]\cdot[(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\overrightarrow{A}^{(j)}]$$

$$= \left(\overrightarrow{A}^{(i)}\right)^t \overrightarrow{A}^{(j)} = \overrightarrow{A}^t_i\,\overrightarrow{A}^{(j)}$$

$\because\ \delta_{ij} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \mathcal{A}(\vec{e}_i)\,\mathcal{A}(\vec{e}_j)$

$\therefore\ \overrightarrow{A}^{(t)}_i\,\overrightarrow{A}^{(j)} = \delta_{ij} \qquad i,j\in\{1,\dots n\}$

即 $A^tA = E \Rightarrow A\in O_n(\mathbb{R})$

(ii) ⇒ (iii) 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2+\dots+x_n^2$$

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x}) = \left(A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)^t A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\dots x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = (x_1,\dots x_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$= x_1^2+\dots+x_n^2 = \|x\|^2$$

(iii) ⇒ (i) $\quad \forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}))\cdot\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \underline{(\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}))}^{(\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}))}$$

$$|\vec{x}|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2 = |\mathcal{A}(\vec{x})|^2+2\mathcal{A}(\vec{x})\,\mathcal{A}(\vec{y})+|\mathcal{A}(\vec{y})|^2$$

$\because\ |\vec{x}| = |\mathcal{A}(\vec{x})|,\ |\vec{y}| = |\mathcal{A}(\vec{y})|$

$\therefore\ \vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})\,\mathcal{A}(\vec{y})$ $\qquad$ □

命题 4.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交

则在 V 的某组单位正交基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} N_2(0,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & N_2(0,\sin\theta_s) & & \\ & & & E_k & \\ 0 & & & & -E_l \end{pmatrix}$$

其中 ~~$\theta_i\in(0,\pi)$~~，$2s+k+l=n$.

$\theta_i \neq g\pi \quad g\in\mathbb{Z}$

特别地 A的所有特征根的模长都是1

证：由定理3.3 和 推论3.2，和 命题4.4(iii) 直接得到. ▨

例：设 $A\in M_n(F)$ 正交，且 ~~A没有~~
$-1\notin spec_{\mathbb{C}}(A)$，证明：$\det(E+A)>0$.

证：∃正交矩阵 P，使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix} N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & \\ & & & E_{n-2s}\end{pmatrix}$$

$$P^t(E+A)P=\begin{pmatrix} N_2(1+\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & N_2(1+\cos\theta_s,\sin\theta_s) & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2E_{n-2s}\end{pmatrix}$$

$$N_2(1+\cos\theta,\sin\theta)=\begin{vmatrix}1+\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & 1+\cos\theta\end{vmatrix}\qquad \sin\theta\neq 0$$

$$=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2(1+\cos\theta)$$

$$|E+A|=|P^t|\,|E+A|\,|P|$$
$$=\prod_{i=1}^{s}2^s\,\alpha^n\prod_{i=1}^{s}(1+\cos\theta_i)>0 \quad ▨$$

§5 实二次型与正交变换

~~定理5.1 设 $q: V\to\mathbb{R}$ 是二次型，则 q 在 V 的某组单位正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$.~~

定理5.1 设 $q: V\to\mathbb{R}$ 是二次型，q 在 V 的单位正交基下的矩阵是 A，则存在 V 的另一组单位正交基，使得 V 在新的基底下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的特征值

证：设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基

设 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$

$q(\vec{x}) = (x_1,\cdots,x_n)\, A \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$A\in M_n(\mathbb{R})$ 对称

由定理3.1 $\exists\, P\in O_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

令 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$

由定理1.3 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基

设 $\vec{x} = y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_n\vec{\varepsilon}_n$ 则

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$ [第一章推论7.1]

$$q(\vec{x}) = \cancel{\vec{x}^tA\vec{x}}\ (x_1\cdots x_n)\, A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= (y_1\cdots y_n)\, P^tAP\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= (y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 y_1^2+\cdots+\alpha_n y_n^2$$ ∎

例：设 $\mathbb{R}^2$，标准欧氏空间，$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

$q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$．计算一组单位正交基使得 $q(\vec{x})$ 在该基下的矩阵是对角的

解 $q(\vec{x}) = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \frac12\\ \frac12 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

$\chi_A = (x-\frac12)(x-\frac32)$.

$\lambda_1 = \frac12$ $\quad\lambda_2 = \frac32$

V^{λ_1} 是 $(\frac12E-A)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 的解空间

$V^{\lambda_1} = \langle\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\rangle = \langle\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\rangle$．同理

$V^{\lambda_2} = \langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\rangle = \langle\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\rangle$

$\because V^{\lambda_1}\perp V^{\lambda_2}$ $\quad P = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}_2}\right)$ 是正交矩阵

$P^tAP = \begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac32\end{pmatrix}$

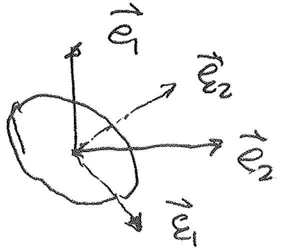
令 $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

且令 $\vec{x} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$

在 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 下

$$q(\vec{x}) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac12 y_1^2 + \frac32 y_2^2$$



$$P=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}), & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}), & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2=\frac{y_1^2}{\frac{1}{\lambda_1}}+\frac{y_2^2}{\frac{1}{\lambda_2}}$$

$\vec{\varepsilon}_1\in V^{\lambda_1}$，$\vec{\varepsilon}_2\in V^{\lambda_2}$　到此为止

引理5.1　设 $A, B\in M_n(\mathbb{R})$ 对称
如果 A 正定，则存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$
使得 $P^tAP=E$ 且 P^tBP 为对角阵

证：~~由惯性定理和正定~~ 因为 A 正定
所以，A 的正惯性指数为 n，从而
$\exists P_1\in GL_n(\mathbb{R})$，使得
$$P_1^tAP_1=E \text{ 且 } P_1^tBP_1 \text{ 为对称阵}$$
由定理3.1　$\exists P_2\in O_n(\mathbb{R})$，使得
$$P_2^t(P_1^tBP_1)P_2 \text{ 是对角阵}$$

令 $P=P_1P_2$，则
$$P^tAP=P_2^t(P_1^tAP_1)P_2=P_2^tEP_2=P_2^tP_2=E$$
$$P^tBP=P_2^tP_1^tBP_1P_2 \text{ 是对角阵}\quad\square$$

定理5.2　设 p, q 是实向量空间 U 上的两个二次型，p 正定，则 $\exists$ U 的一组基使得 p, q 在该基下的矩阵同时为对角型矩阵

证：设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 U 的一组基，p, q 在该基下的矩阵分别是 A_p 和 A_q
由引理5.1，$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$，使得
$$P^tA_pP \text{ 和 } P^tA_qP$$
都是对角矩阵，则 p, q 在基底 $(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A$ 下表示都是对角阵。$\square$

例：设 $A, B\in M_n(\mathbb{R})$ 正定
证明　$\det(A+B)\geq\det(A)+\det(B)$

证：由引理5.1，$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得
$$A=P^tP \text{ 且 } B=P^t\underbrace{\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}_{D}P$$
且 D 正定