更正：

讲义中 定理3.3 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ ~~斜对称~~ 改为(正交)

则
$$A \sim_o \begin{pmatrix} N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & \\ & & & E_k & \\ & & & & -E_l \end{pmatrix}$$

$$2s+k+l=n.$$

命题4.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交

则 在 V 的某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N_s(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & \\ & & & E_k & \\ & & & & -E_l \end{pmatrix}$$

(0)

回42 完全正交幂等方组

定义：设 W 是 F 上线性空间

~~$W_1,\dots,W_m\subset W$ 是子空间~~

$\sigma_1,\dots\sigma_m\in\mathcal{L}(W)$ 称为完全正交幂等方组 如果

(1) $\forall i,j\in\{1,\dots m\}$ $\sigma_i\circ\sigma_j=\delta_{ij}\sigma_i$

(2) $\sigma_1+\dots+\sigma_m=\mathcal{E}$.

例 设 $W_1,\dots W_m\subset W$ 是子空间

$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$

则 $\forall\vec{x}\in W$, $\exists!\ \vec{x}_1\in W_1,\dots,\vec{x}_m\in W_m$

令 π_i: $W\longrightarrow W_i\subset W$, $i=1\dots m$

$\vec{x}\longmapsto\vec{x}_i$

则 $\pi_1,\dots,\pi_m$ 是一个完全正交幂等方组

反之：如果 $\sigma_1,\dots\sigma_m$ 是完全正交幂等方组

则 $W=\operatorname{im}(\sigma_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}(\sigma_m)$

且 σ_i 是 W 到 $\operatorname{im}(\sigma_i)$ 上的投影.

引理5.1 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 对称. 如果 A 正定, 则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$. 使得

$$P^tAP = E \quad 且 \quad P^tBP \text{ 为对角阵}$$

证: 由第一章定理17.3可知, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^tQ$. 令 $P_1 = Q^{-1}$. 并注意到 $(Q^t)^{-1} = (Q_1^{-1})^t = P_1^t$, 我们有

$$P_1^t A P_1 = E$$

因为 B 对称, 所以 $P_1^tBP_1$ 也对称

由定理3.1 $\exists P_2 \in O_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P_2^t(P_1^tBP_1)P_2$$

为对角矩阵. 则 $P = P_1P_2$. 则

$$P^tBP = (P_1P_2)^tBP_1P_2 = P_2^t(P_1^tBP_1)P_2$$

是对角阵. 而

$$P^tAP = (P_1P_2)^tAP_1P_2 = P_2^t(P_1^tAP_1)P_2$$
$$= P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E \quad (\because P_2 正交)$$

$\boxed{\#}$

例: 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 正定

证明 $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$

证: 由引理5.1 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$. 使得

$$P^tAP = E, \quad P^tBP = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots \beta_n)$$

因为 B 正定, 所以 $\beta_1 > 0, \cdots \beta_n > 0$

$$P^t(A+B)P = P^tAP + P^tBP$$
$$= E + \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots \beta_n)$$
$$= \mathrm{diag}(1+\beta_1, \cdots 1+\beta_n)$$

$$\det(P^t(A+B)P) = \prod_{i=1}^n (1+\beta_i)$$

$$\Rightarrow \quad \det(P)^2\det(A+B) = \prod_{i=1}^n (1+\beta_i)$$

$$\det(P)^2(\det(A)+\det(B)) = \det(P^tAP) + \det(P^tBP)$$
$$= \det(E) + \det(\mathrm{diag}(\beta_1 \cdots \beta_n))$$
$$= 1 + \beta_1 \cdots \beta_n$$

$$\because \prod_{i=1}^n (1+\beta_i) \geqslant 1 + \beta_1 \cdots \beta_n$$

$$\Rightarrow \quad \det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$$

$\boxed{\#}$

定理5.2 设 W 是 n 维实线性空间

P, Q 是 W 上的两个二次型，而且 P 正定

则存在 W 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$，使得

$\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n$

$P(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$，$Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$

<u>证</u>：设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 W 的一组基

P, Q 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A, B

则 A, B 对称且 A 正定。由引理5.1，

存在 $M \in GL_n(\mathbb{R})$，使得

$M^t A M = E$，$M^t B M = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

令 $(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) M$

则 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 下 P, Q 的矩阵分别为

E 和 $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ $\square$

§6 正定算子

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称，如果

$\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ $\quad \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$

则称 $\mathcal{A}$ 是 V 上的正定算子

命题4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称

则 $\mathcal{A}$ 正定 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任一单位正交基下的矩阵正定

<u>证</u>：设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基

$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是 A，$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$

则 $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

设 $\vec{x} \neq \vec{0}$ $\qquad$ (A 对称)

$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0 \Longleftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$

$\Longleftrightarrow A$ 正定 $\square$

③

谱分解定理 设 W 是~~域~~F上的n维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$ 可对角化，则 $\exists!\ \alpha_1,\dots\alpha_m\in F$，两两不同，和完全~~使得~~正交幂等组 $\sigma_1,\dots\sigma_m$ 使得

$$\mathcal{A}=\alpha_1\sigma_1+\dots+\alpha_m\sigma_m$$

进而 $\sigma_1,\dots\sigma_m\in F[\mathcal{A}]$.

证：存在性：因为 $\mathcal{A}$ 可对角化，所以 $\mathcal{A}$ 的互不相同的特征根 $\alpha_1,\dots\alpha_m\in F$

且 $W=W^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W^{\lambda_m}$ (第章习题 5.1)

设 σ_i 为从 W 到 W^{λ_i} 上的投影，则 $\sigma_i\in\mathcal{L}(W)$ $i=1,2,\dots m$

于是 $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ 是完全正交幂等组

即：$\forall i\in\{1,\dots n\}$ $\sigma_i\circ\sigma_i=\mathcal{E}$

$\forall i,j\in\{1,\dots n\}$ $i\neq j$, $\sigma_i\circ\sigma_j=0$

$\sigma_1+\dots+\sigma_m=\mathcal{E}$.

因为：$\forall\vec{x}\in W\ \exists!\ \vec{x}_1\in W^{\lambda_1},\dots x_m\in W^{\lambda_m}$ 使得 $\vec{x}=\vec{x}_1+\dots+\vec{x}_m$

$$\sigma_i:\ W\longrightarrow W,\quad \vec{x}\longmapsto\vec{x}_i,\quad i=1,2,\dots m$$

验证：$\mathcal{A}=\lambda_1\sigma_1+\dots+\lambda_m\sigma_m$

设 $\vec{x}\in W$

$\vec{x}=\sigma_1(\vec{x})+\dots+\sigma_m(\vec{x})$

则 $\mathcal{A}(\vec{x})=\mathcal{A}(\sigma_1(\vec{x}))+\dots+\mathcal{A}(\sigma_m(\vec{x}))$

$$=\lambda_1\sigma_1(\vec{x})+\dots+\lambda_m\sigma_m(\vec{x})$$

$$=(\lambda_1\sigma_1+\dots+\lambda_m\sigma_m)(\vec{x})$$

验证完毕，存在性成立

唯一性：设 $\alpha_1,\dots\alpha_k\in F$ 两两不同，$\tau_1,\dots\tau_k$ ~~是~~ $\in\mathcal{L}(W)$ 是完全正交幂等

且 $\mathcal{A}=\alpha_1\tau_1+\dots+\alpha_k\tau_k$

$\boxed{\forall\vec{w}\in\mathrm{Im}(\tau_1)\quad \mathcal{A}(\vec{w})=\alpha_i\tau_i(\vec{w})=\alpha_1\vec{w}\quad (\because\ \vec{w}=\tau_1(\vec{v})}$

$\tau_1(\vec{w})=\tau_1^2(\vec{w})=$

$\forall \vec{w} \in \mathrm{im}(\tau_1)$, $\exists \vec{v} \in W$. 使得 $\vec{w} = \tau_1(\vec{v})$

$$A(\vec{w}) = (\alpha_1\tau_1 + \cdots + \alpha_m\tau_m)(\vec{w})$$
$$= \alpha_1\tau_1(\vec{w}) + \alpha_2\tau_2(\vec{w}) + \cdots + \alpha_m\tau_m(\vec{w})$$
$$= \alpha_1\tau_1^2(\vec{v}) + \alpha_2\tau_2\circ\tau_1(\vec{v}) + \cdots + \alpha_m\tau_m\circ\tau_1(\vec{v})$$
$$= \alpha_1\tau_1(\vec{v})$$
$$= \alpha_1\vec{w}$$

于是 $\alpha_1 \in \mathrm{spec}_F(A)$ 且 $\vec{w} \in V^{\alpha_1}$

不妨设 $\alpha_1 = \lambda_1$. 则 $\mathrm{im}(\tau_1) \subset V^{\lambda_1}$

同理可设 $\alpha_i = \lambda_i$ 且 $\mathrm{im}(\tau_i) \subset V^{\lambda_i}$, $i=2,\dots,k$

$\forall \vec{x} \in W$

$$\vec{x} = (\underbrace{\tau_1 + \cdots + \tau_k}_{=\mathcal{E}})(\vec{x}) = \tau_1(\vec{x}) + \cdots + \tau_k(\vec{x})$$

$$\Rightarrow W = \mathrm{im}(\tau_1) + \cdots + \mathrm{im}(\tau_k)$$
$$= \mathrm{im}(\tau_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{im}(\tau_k)$$
$$= V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k} \oplus V^{\lambda_{k+1}} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m}$$

$\Rightarrow k = m$. $\lambda_1 = \alpha_1, \dots, \lambda_m = \alpha_m$

且 $\sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_m = \tau_m$ 唯一性成立

(iii) $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ $\exists f_i \in F[t]$

使得 ~~$f_i(\lambda_1)=$~~ $f_i(\lambda_1) = \cdots = f_i(\lambda_{i-1}) = 0$

$f_i(\lambda_i) = 1$, $f_i(\lambda_{i+1}) = \cdots = f_i(\lambda_m) = 0$

(Lagrange 插值式中国剩余定理)

断言 $\sigma_i = f_i(A)$, $i=1,\dots,m$

断言的证明, 只需验证 $\sigma_1 = f_1(A)$.

$\because f_1(\lambda_2) = \cdots = f_1(\lambda_m) = 0$

$\therefore f_1(t) = g_j(t)(t-\lambda_j)$, $j=2,\dots,m$

$\because f_1(\lambda_1) = 1$ $\therefore f_1(t) = g_1(t)(t-\lambda_1) + 1$

其中 $g_1, \dots, g_m \in F[t]$

设 $\vec{x} \in W$ 则 $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_m$

其中 $\vec{x}_i \in V^{\lambda_i}$, ~~$i=1,\dots,m$~~ $= \mathrm{im}(\sigma_i)$, $i=1,\dots,m$

$\boxed{\sigma_1(\vec{x}) = \cancel{\lambda_1\vec{x}}}$

~~$f_1(A)(\vec{x}) = g_1(A)(A-\lambda_1\mathcal{E})+x$~~

$\sigma_1(\vec{x}) = \sigma_1(\vec{x_1}) + \sigma_1(\vec{x_2}) + \cdots + \sigma_1(\vec{x_m})$

$= \sigma_1(\vec{x_1})$ $\left(\because \vec{x_j} = \sigma_j(\vec{y_j}),\ \sigma_1\sigma_j = 0 \ \ j=2,\cdots m \right)$

$= \vec{x_1}$ $\left(\because \cancel{\sigma_1()}\ \vec{x_1} = \sigma_1(\vec{y_1}),\ \sigma_1^2 = \sigma_1 \right)$

$f_1(A)(\vec{x}) = f_1(A)(\vec{x_1}) + f_1(A)(\vec{x_2}) + \cdots + f_m(A)(\vec{x_m})$

$= (g_1(A)(A-\lambda_1 E) + E)(\vec{x_1}) +$
$(g_2(A)(A-\lambda_2 E))(\vec{x_2}) + \cdots + (g_m(A)(A-\lambda_m E))(\vec{x_m})$

$= E\vec{x_1} = \vec{x_1}$ $\left(\because \vec{x_i} \in V^{\lambda_i} \Rightarrow (\cancel{A}-\lambda_i E)(\vec{x_i}) = \vec{0} \right)$

$\blacksquare$

定理4.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 正定

(i) $\exists!$ 正定矩阵 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = B^2$$

(ii) $B \in \mathbb{R}[A]$

证：由推论3.1 和定理3.1

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$，使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P$$

令 $B = P^t \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P \Rightarrow B$ 正定

$$B^2 = P^t \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P P^t \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P$$

$$= P^t \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P = A$$

又唯一性也成立

设 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 正定 使得 $A = C^2$

~~则~~ 因为 C 可对角化 所以

C 有谱分解 $C = \alpha_1\tau_1 + \cdots + \alpha_m\tau_m$

(把 C 看成 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 中元素)

$A = C^2 = \beta_1^2\tau_1 + \cdots + \beta_k^2\tau_k$ $\left(\because \tau_1, \cdots \tau_k \text{ 是正交幂方的} \right)$

同理 B 也有谱分解

$$B = \alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_m\sigma_m$$

$$A = B^2 = \alpha_1^2\sigma_1 + \cdots + \alpha_m^2\sigma_m$$

由谱分解定理

$k = m.$ $\beta_i^2 = \alpha_i^2$ $i = 1,\cdots m$ $\because \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^+$ $\therefore \alpha_i = \beta_i$ 同

<u>唯一性成立</u> $\because \sigma_i \in \mathbb{R}[A] \quad \therefore B \in \mathbb{R}[A]$ ▨

定理4.2（极化定理） 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$

则∃! 正定矩阵 S 和正交矩阵 T

使得 $\quad A = ST$

证：由第一章定理17.3， AA^t 正定

由定理4.1 ∃ 正定矩阵 S，使得

$$AA^t = S^2$$

令 $T = S^{-1}A$，则 $A = ST$.

下面验证 $T \in O_n(\mathbb{R})$

$\cancel{T^tT = A^t(S^{-1})^tS}$

$$TT^t = S^{-1}AA^t(S^{-1})^t = S^{-1}S^2(S^{-1}) = E$$

$(\because S$ 对称$)$

T 正交. 存在性成立

设 S' 正定. T' 正交 如果

$$ST = S'T'$$

则 $T^tS^t = T'^tS'^t \Rightarrow S^2 = S'^2$

$\Rightarrow S \cdot S^t = S'S'^t$

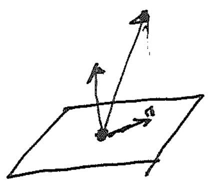
由定理4.1. $S = S' \Rightarrow T = T'$ ▨

§7 最小二乘法简介

§7.1 向量到子空间的距离

定义：设 $\vec{v} \in V$，$W \subset V$ 是子空间

$\vec{v}$ 到 W 的距离定义为 $\min\limits_{\vec{w} \in W} \|\vec{v} - \vec{w}\|$



引理7.1 设 $W \subset V$ 是子空间，

$\vec{v} \in V$，存在唯一的向量 $\vec{x} \in W$

使得 $\quad \langle \vec{v} - \vec{x} \rangle \perp W$

证：$V = W \oplus W^\perp$ 使得

$\exists!\ \vec{x} \in W,\ \vec{y} \in W^\perp$

$$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow \vec{v} - \vec{x} \in W^\perp$$

$$\langle \vec{v} - \vec{x} \rangle \perp W$$

存在性成立

设 $\langle \vec{v}-\vec{z}\rangle \perp W$. 则 $\vec{v}-\vec{z} \in W^{\perp}$

$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{z} + \cancel{\vec{y}} - \vec{z} \quad \Rightarrow \vec{z} = \vec{x},\ \vec{v}-\vec{z} = \vec{y}$

唯一性成立

注：称引理7.1中的 $\vec{x}$ 为 $\vec{v}$ 在 W 上的正交投影

定理7.1 设 $\vec{v} \in V$, $W \subset V$ 子空间, $\vec{x}$ 是 $\vec{v}$ 在 W 上的正交投影 则 $\vec{v}$ 到 W 的距离为 $\|\vec{v}-\vec{x}\|$

证： 设 $\vec{w} \in W$

$$\vec{v}-\vec{w} = \underbrace{(\vec{v}-\vec{x})}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{(\vec{x}-\vec{w})}_{\in W}$$

$$\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}-\vec{x}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{w}\|^2 \quad \text{(勾股定理)}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{v}-\vec{w}\| \geqslant \|\vec{v}-\vec{x}\|. \quad \blacksquare$$

正交投影的计算

⑦

设 $\vec{v} \in V$, $\vec{w}_1, \dots \vec{w}_d$ 是子空间 W 的一组基. 计算 $\vec{v}$ 在 W 上的正交投影 $\vec{x}$

设 $\vec{x} = x_1 \vec{w}_1 + \cdots + x_d \vec{w}_d$

$\langle \vec{v}-\vec{x}\rangle \perp W \Leftrightarrow (\vec{v}-\vec{x}) \perp \vec{w}_i$, $i=1 \dots d$

$\Leftrightarrow (\vec{v}-\vec{x}) \cdot \vec{w}_i = 0$

$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w}_i = \vec{x} \cdot \vec{w}_i$

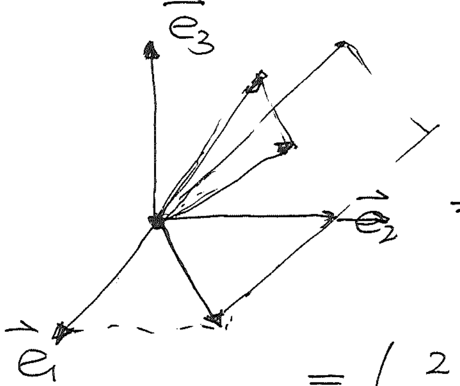
$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{d} x_j (\vec{w}_j \cdot \vec{w}_i) = \vec{v} \cdot \vec{w}_i$, $i = 1, 2, \dots d$

$$\Leftrightarrow \quad G(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{w}_1 \\ \vdots \\ \vec{v} \cdot \vec{w}_d \end{pmatrix}$$

因为 $G(\vec{w}_1, \dots \vec{w}_d) \neq 0$, 所以上述线性方程组的唯一解给出 $\vec{v}$ 的正交投影

例 设 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

计算 $\vec{v}$ 在 $\langle\vec{w_1},\vec{w_2}\rangle$ 中的正交投影和 $\vec{v}$ 到 $\langle\vec{w_1},\vec{w_2}\rangle$ 的距离



$$G(\vec{w_1},\vec{w_2})=\begin{pmatrix}\vec{w_1}\cdot\vec{w_1} & \vec{w_1}\cdot\vec{w_2}\\ \vec{w_2}\cdot\vec{w_1} & \vec{w_2}\cdot\vec{w_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$\vec{v}\cdot\vec{w_1}=2$ $\quad$ $\vec{v}\cdot\vec{w_2}=2$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\x_2=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$\vec{v}$ 在 W 中的正交投影 ~~为~~ $\vec{w}=x_1\vec{w_1}+x_2\vec{w_2}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}. \qquad \|\vec{v}-\vec{x}\|=\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

~~例~~ §7.2 最小二乘法

问题 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$

其中 a_{ij}, $b_1,\dots b_m\in\mathbb{R}$

求解 (L) $A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\vec{b}$

A 的列空间 $V_c(A)=\langle\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(m)}\rangle$

(L) 有解 $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\vec{b}=\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(m)}}_{\exists\alpha_1\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}\in V_c(A)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ 到 $V_c(A)$ 的距离为零

(L) 的最小二乘解：求 $\beta_1,\dots\beta_n\in\mathbb{R}$

使得 $\|\beta_1\vec{A_1}+\cdots+\beta_m\vec{A_m}-\vec{b}\|^2$ 最小

即 $\beta_1\vec{A_1}+\cdots+\beta_m\vec{A_m}$ 是 $\vec{b}$ 的正交投影 在 $V_c(A)$ 上

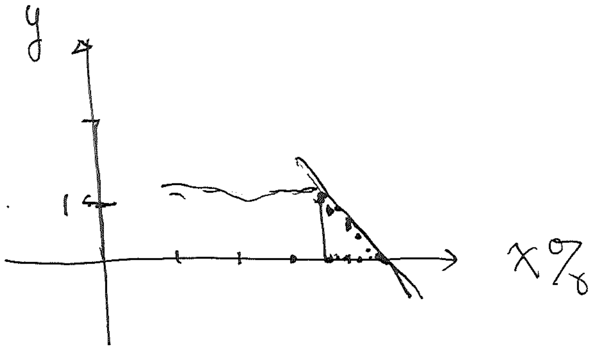
例： x—成份　y—成品率

$x\%$	3.6	3.7	3.8	4.0	4.1	4.2
y	1.0	0.9	0.9	0.6	0.56	0.35

设 $y = a(x\%) + b$. 求 a, b

$$\begin{cases} 3.6a + b = 1.0 \\ 3.7a + b = 0.9 \\ \quad\vdots \\ 4.2a + b = 0.35 \end{cases}$$ 最小二乘法

$a = -1.05$. $b = 4.81$ $y = -1.05(x\%) + 4.81$



§8 Hermite 空间简介 10

设 V 是 n 维实空间，W 是 n 维复空间

基域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
	$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x^2 > 0$	$(\sqrt{-1})^2 = -1$
	$\mathbb{R}[t]$ 中的不可约因子次数 ≤ 2	$\mathbb{C}[t]$ 中不可约因子次数 ≤ 1

$W \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ 称为半双线性型

定义：$f: W \times W \longrightarrow \mathbb{C}$

如果：(i) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in W$. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta f(\vec{y}, \vec{z})$$

$$f(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \bar{\alpha} f(\vec{x}, \vec{y}) + \bar{\beta} f(\vec{x}, \vec{z})$$

$W \times W \to \mathbb{C}$ 的半双线性型

定义：设 f 是 $W \times W \to \mathbb{C}$ 的半双线性型

如果 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in W$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})}$$

则称 f 是 Hermite 型

设 f 是 W 上的 Hermite 型

则 $f(\vec{x},\vec{x}) = \overline{f(\vec{x},\vec{x})} \Rightarrow f(\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}$

如果 $\forall \vec{x} \in W \setminus \{\vec{0}\}$. $f(\vec{x},\vec{x}) > 0$

则称 f 是正定的

半双线性型 f 的矩阵表式

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 W 的一组基

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix},\ \text{其中 } A = (f(\vec{e}_i,\vec{e}_j))_{n\times n}$$

若 f 是 Hermite 的，则

$$\overline{A}^t = A$$

此时称 A 是 Hermite 矩阵

Hermite 矩阵称为正定的. 如果

$\forall\ x_1, \dots x_n \in \mathbb{C}$ 不全为零

$$(x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} > 0$$

欧氏空间	Hermite 空间
(V, f)	(W, f)
f 正定双线性型	f 正定 Hermite 型
$\vec{x}\cdot\vec{y} = f(\vec{x},\vec{y})$	$(\vec{x}\mid\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y})$
$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$	$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle}$
$\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$	$\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow \langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = 0$
GS 过程	GS 过程
单位正交基	单位正交基
设 $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n$ 是单位正交基	设 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$ 单位正交基
设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$	设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$
$(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)A$	$(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)A$
$(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n)$ 是单位正交基	$(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n)$ 是单位正交基
$\Leftrightarrow A^tA = E$	$\Leftrightarrow \overline{A}^tA = E$
(A 是正交矩阵)	(A 是 U 矩阵)
实方阵的正交相似	复方阵的 U 相似

正规算子与正规矩阵

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$	$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(W)$
$\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 为 $\mathcal{A}$ 的伴随算子. 如果 $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in V$ $\vec{x}\cdot\mathcal{A}(\vec{y})=\mathcal{A}^*(\vec{x})\cdot\vec{y}$	$\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(W)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的伴随算子 如果 $\forall\vec{x},\vec{y}\in W$ $(\vec{x}\mid\mathcal{A}(\vec{y}))=(\mathcal{A}^*(\vec{x})\mid\vec{y})$
若 $\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 则称 $\mathcal{A}$ 正规	✓
$A\in M_n(\mathbb{R})$. 若 $A^tA=AA^t$, 则称 A 正规	$A\in M_n(\mathbb{C})$ 若 $\overline{A}^tA=A\overline{A}^t$ 则称 A 正规
对称	Hermite
正交	U 矩阵
斜对称	斜 Hermite

特征型

V	W
$U\subset V$ 子空间 $V=U\oplus U^\perp$	✓
设 $\mathcal{A}$ 正规 $U-\mathcal{A}$ 不变 $\Longleftrightarrow U^\perp-\mathcal{A}$ 不变	✓
$\mathcal{A}$ 有一维或二维 ~~本口~~ 不变子空间	$\mathcal{A}$ 有一维不变子空间
$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_l$, U_i 一维或二维 $\mathcal{A}$-不变子空间	$W=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$, U_i 一维不变子空间
A 正规. $A\sim_O\begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & N_s(\alpha_s,\beta_s) & & \\ & & & \lambda_{s+1} & \\ 0 & & & & \ddots \ \lambda_n\end{pmatrix}$	A 正规 $\Longleftrightarrow$ $A\sim_U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_i\in\mathbb{C}$

当 $A \in GL_n(\mathbb{C})$ Hermite

$$A \sim_U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$$

A 正定 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}^+$

A 斜 Hermite

$$A \sim_U \begin{pmatrix} \alpha_1\sqrt{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\sqrt{-1} \end{pmatrix} \quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$$

A 是 U-矩阵

$$A \sim_U \begin{pmatrix} e^{\theta_1\sqrt{-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\theta_n\sqrt{-1}} \end{pmatrix}$$

$\theta_1, \dots \theta_n \in [0, 2\pi)$

同时化对角线. 平方根定理. 和 极化定理

对 $M_n(\mathbb{C})$ 所对应的方阵也成立

(此时 正交矩阵 变为 U 矩阵).
对称阵 变为 Hermite)

总结

▷ 消元与降维 (Gauss消去. 归纳法)

▷ 利用等价关系分类. 找定义标准型 $\left(\sim_e, \sim_c, \sim_s, \sim_o, \sim_u\right)$

▷ Divide — Conquer — Combine.

Divide $\longrightarrow$ (多项式因式分解. Bezout关系
直和分解)

Conquer $\longrightarrow$ Jordan 块. 二维正规块

Combine $\longrightarrow$ lcm, ~~分块矩阵~~ Jordan
标准型. 中国剩余定理
插值.