回忆: 设 $f=(y-x_1)\cdots(y-x_n)\in A[x_1,\dots,x_n,y]$

且 $f=y^n-\varepsilon_1 y^{n-1}+\varepsilon_2 y^{n-2}+\cdots+(-1)^n\varepsilon_n$

则 ε_i 是关于 $x_1,\dots,x_n$ 的对称多项式

注: $(-1)^i\varepsilon_i$ 是 y^{n-i} ~~系数~~ 在 f 中的系数

$$\varepsilon_i=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_i\le n} x_{k_1}\cdots x_{k_i}\text{，齐 } i \text{ 次}$$

特别地

$\varepsilon_1=x_1+\cdots+x_n$, $\varepsilon_n=x_1\cdots x_n$

定理4.1（根与系数的关系）设 F 是域

设 $f=f_n(x-r_1)\cdots(x-r_n)$

$=f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_0$

其中 $f_i\in F$, $r_j\in F$, $f_n\neq 0$

则 $f_n^{-1}f_i=(-1)^{n-i}\varepsilon_{n-i}(r_1,\dots,r_n)$

$i=1,2\dots n$

证: 由定理3.2

$\exists$ 环同态 $\varphi: F[x_1,\dots,x_n,x]\longrightarrow F[x]$

使得 $\varphi|_F=\mathrm{id}_F$, $\varphi(x_i)=r_i$, $i=1,\dots,n$,

$\varphi(x)=x$.

设 $g=f_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

则 $\varphi(g)=f_n(x-r_1)\cdots(x-r_n)=f$

由命题4.1

$$g=f_n\left(x^n+\sum_{i=1}^n(-1)^i\varepsilon_i x^{n-i}\right)$$

$$f=\varphi(g)=f_n\left(x^n+\sum_{i=1}^n(-1)^i\varepsilon_i(r_1,\dots,r_n)x^{n-i}\right)$$

$$=f_n x^n+\left(\sum_{i=1}^n f_{n-i}x^{n-i}\right)$$

故 $f_{n-i}=f_n(-1)^i\varepsilon_i(r_1,\dots,r_n)$

$f_i f_n^{-1}=(-1)^{n-i}\varepsilon_{n-i}(r_1,\dots,r_n)$ $\boxed{}$

$i=0,\dots,n-1$

例 $n=2$

$r_1+r_2=-\frac{f_1}{f_2}$

$r_1r_2=\frac{f_0}{f_2}$

$n=3$

$r_1+r_2+r_3=\frac{-f_2}{f_3}$, $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{f_1}{f_3}$

$r_1r_2r_3=\frac{-f_0}{f_3}$

第一章 空间与形式

§1 抽象向量空间

例：设 $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 是域

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F \right\}$$

设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\vec{u}, \vec{v} \in F$

定义：$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$

设 $\lambda \in F$. $\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$

则 F^n 是域 F 上的 n 维线性空间.

定义：设 $(V, +, \vec{0})$ 是交换群。定义 $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 是域，定义

数乘：$F \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \vec{v}$

满足以下4性质

(i) $\forall \alpha, \beta \in F$, $\vec{v} \in V$ （结合律）

$\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

(ii) $\forall \vec{v} \in V$

$1\vec{v} = \vec{v}$

(iii) $\forall \alpha, \beta \in F$, $\vec{v} \in V$

$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

(iv) $\forall \alpha \in F$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

则称 V 是 F 上的向量空间（线性空间）。F 是 V 的基域.

例1 平凡线性空间 $V=\{\vec{0}\}$

F 是任何域: $\forall \alpha\in F \quad \alpha\vec{0}=\vec{0}$

例2 坐标空间 $V=F^n$

例3 F上的矩阵: $F^{m\times n}$

矩阵加法, 矩阵数乘

"零向量"是 $O_{m\times n}$

例4 $F[x]$ 是线性空间

$\forall f, g\in F[x]$.

$f+g$ 是多项式相加

数乘为 αf. $\alpha\in F$

例5 函数空间

设 S 是非空集合, F 是域

$Func(S, F) := \{ f \mid f: S\to F$ 映射 $\}$

设 $f, g\in F$, 定义

$$f+g: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & F \\ s & \longmapsto & f(s)+g(s) \end{array}$$

设 $\alpha\in F$

$$\alpha f: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & F \\ s & \longmapsto & \alpha f(s) \end{array}$$

则 $f+g, \alpha f \in Fun(S, F)$

$$\vec{0}: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & F \\ s & \longmapsto & 0 \end{array}$$

则 $(Func(S, F), +, 0)$ 是交换群

$Func(S, F)$ 关于上述定义的数乘

构成 F 上的线性空间

例6 F-代数构成的线性空间

设 ~~R是~~ $(R, +, 0, \cdot, 1)$ 是环

F 是 R 的子域

即 $F \subset R$. $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 是域

$\forall\ a, b \in R$ $a+b$ 按环中加法

$\forall\ \alpha \in F$ αa 按环中乘法

则 R 是 F 上的线性空间

特例6.1 $F[x]$, $F[x_1, \dots, x_n]$

特例6.2 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

例] 笛卡儿积. 设

$(V, +, \vec{0}_V, \cdot)$, $(W, +, \vec{0}_W, \cdot)$

是两个域F上的线性空间

~~命题1.1~~

则 $V \times W = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \middle| \vec{v} \in V, \vec{w} \in W \right\}$

可以如下方式定义成 F 上的线性空间

~~设 $\vec{v}$~~

设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{w}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \end{pmatrix}$$

$\forall \alpha \in F$ $\alpha \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \vec{v}_1 \\ \alpha \vec{w}_1 \end{pmatrix}$

此时 $V \times W$ 中的"零向量"是 $\begin{pmatrix} \vec{0}_V \\ \vec{0}_W \end{pmatrix}$.

命题1.1

(i) $\forall\ \lambda \in F$, $\vec{v} \in V$, $\lambda \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\lambda = 0$ 或 $\vec{v} = \vec{0}$

(ii) $\forall\ \vec{v} \in V$ $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

证: "⇐" 先设 $\lambda=0$. 在F中有

$$1+0=1 \Rightarrow (1+0)\vec{v}=1\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow 1\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v}=1\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow 0\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

再设 $\vec{v}=\vec{0}$. 则

$$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

$$\lambda(\vec{0}+\vec{0})=\lambda\vec{0}$$

$$\lambda\vec{0}+\lambda\vec{0}=\lambda\vec{0}$$

$$\lambda\vec{0}=\vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{v}=\vec{0}$$

"⇒" 设 $\lambda\vec{v}=\vec{0}$ 且 $\lambda\neq 0$

则 $\lambda^{-1}(\lambda\vec{v})=\lambda^{-1}\vec{0}=\vec{0}$

$$(\lambda^{-1}\lambda)\vec{v}=\vec{0}$$

$$1\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

$$\vec{v}=\vec{0}$$ ☒

思考题: $(\mathbb{Z},+,0)$ 不可能是任何域上的线性空间.

§2. 子空间

定义 设 V 是域 F 上的线性空间 $W\subset V$ 且 W 关于 V 中的加法和数乘也构成线性空间, 则称 W 是 V 的子空间.

命题1.2. 设 $W\subset V$. ~~且 $\forall \alpha,\beta\in F$~~

则 W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$

$\forall\, \alpha,\beta\in V$ F $\vec{u},\vec{v}\in W$

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W$$

证: "⇒" 显然

"⇐" ∵ $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W$

∴ $\vec{u}+\vec{v}\in W$. $\alpha\vec{u}\in W$

于是 W 关于加法和数乘都封闭

由此可知 W 是 V 的子空间.

例1 平凡子空间 $\{\vec{0}\}$, V

例2 F^n 中的子空间举例

设 $A \in F^{m\times n}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解的集合

是 F^n 中的子空间

例3 $F^{m\times n}$ 中的子空间举例

(i) 设 $R = \{ A \in F^{m\times n} \mid \vec{A}^{(1)} = \vec{0}_n \}$

(ii) $n=m$. $M_n(F)$ 中所有对称矩阵的集合记为 $SM_n(F)$

$SM_n(F)$ 是子空间

验证: $\forall \alpha, \beta \in F$. $A, B \in SM_n(F)$

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B$$

$$\in SM_n(F)$$

例4. $F[x]$ 中子空间举例

设 $F_n[x] = \{ f \in F[x] \mid \deg(f) < n \}$

$F_n[x]$ 是子空间

设 $p \in F[x] \setminus \{0\}$.

$I_p = \{ f \in F[x] \mid p \mid f \}$

验证: $\forall \alpha, \beta \in F$, $f, g \in I_p$

$\exists\ f_1, g_1 \in I_p$ 使得

$f = f_1 p$ $g = g_1 p$

$\alpha f + \beta g = \alpha f_1 p + \beta g_1 p = (\alpha f_1 + \beta g_1) p$

$\Rightarrow p \mid \alpha f + \beta g \Rightarrow \alpha f + \beta g \in I_p$

例5 函数空间中的子空间

$C[a,b] = \{ f(x) \mid f: [a,b] \to \mathbb{R}, \text{连续} \}$

$C[a,b]$ 是 $\mathrm{Func}([a,b] \to \mathbb{R})$ 的子空间

例6 设 V, W 是 F 上的~~子~~线性空间

$V_1 \subset V$, $W_1 \subset W$ 是子空间

则 $V_1 \times W_1$ 是 $V \times W$ 的子空间.

~~命题2.2.~~

定义：设 V_1, V_2 是 V 的子空间

$$V_1 + V_2 := \{ \vec{v_1} + \vec{v_2} \mid \vec{v_1} \in V_1, \vec{v_2} \in V_2 \}$$

称 $V_1 + V_2$ 是 V_1 与 V_2 的和

命题2.2. (i) V 中任何多个子空间的交仍是子空间

(ii) V 中有限多个子空间的和也是子空间

证：设 I 是一个下标集. $\forall i \in I$, V_i 是 V 的子空间. 设 $W = \bigcap_{i \in I} V_i$

$\vec{u}, \vec{v} \in W$ ∴ 则 $\vec{u}, \vec{v} \in V_i$

$\forall \alpha, \beta \in F$. $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$.

从而 $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_i \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$

由此可知 W 是子空间

设 $I = \{1, 2, \dots, k\}$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_1 + V_2 + \cdots + V_k$

$\exists\ \vec{u_i} \in V_i$, $\vec{v_i} \in V_i$, $i = 1, \dots, k$

使得 $\vec{u} = \vec{u_1} + \cdots + \vec{u_k}$

$\vec{v} = \vec{v_1} + \cdots + \vec{v_k}$

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{v_1}) + \cdots + (\alpha\vec{u_k} + \beta\vec{v_k})$

$\because \forall i \in I$. $\vec{u_i} + \vec{v_i} \in V_i$

$\therefore \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_1 + \cdots + V_k$. ☒

定义：设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in V$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in F$

$$\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$$

称为 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 在 F 上的线性组合

设 $S\subset V$ 非空，记 $\langle S\rangle$ 是 S 中元素所有可能的线性组合的集合

即 $$\langle S\rangle=\left\{\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}\ \middle|\ \begin{matrix}\forall k\in\mathbb{Z}^+,\\ \vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\in S\\ \alpha_1,\cdots\alpha_k\in F\end{matrix}\right\}$$

称 $\langle S\rangle$ 为 S 在 F 上生成的子空间

注：(i) 易验证 $\langle S\rangle$ 的确是子空间

（见上学期讲义，2. 矩阵与线性相关性. P13）

(ii) 设 U 是包含 S 的子空间

则 $\langle S\rangle\subset U$

（见同页）

例：$F[x]=\langle\{1,x,x^2,\cdots\}\rangle$

$=\langle 1,x,x^2,\cdots\rangle$

§3. 线性相关性

~~定义~~ V 是 F 上线性空间

定义：设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in V$. ~~如果存在~~ $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in F$. ~~使得~~ 不全为零

使得 $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

则称 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关. 否则称 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性无关.

设 $S\subset V$ 非空. ~~如果 S 的~~ 若中有一个非空有限子集，使得该子集中的元素线性相关，则称 S 线性相关. 否则称 S 线性无关.

例：$\{1,\cos^2x\}\subset C(-\infty,+\infty)$

线性无关

$$\alpha_1+\alpha_2\cos^2x=0$$

令 $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha_1=0$. 令 $x=\pi\Rightarrow\alpha_2=0$

$\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ 线性相关

$\because \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$

例

$\{e^x, e^{2x}, \cdots e^{nx}\}$ ~~在~~ $C(-\infty,+\infty)$ 线性无关

设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \cdots + \alpha_n e^{nx} = 0 \quad (*)$$

对 (*) 求导得

$$\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n\alpha_n e^{nx} = 0$$

$$\alpha_1 e^x + 2^2\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n^2\alpha_n e^{nx} = 0$$

$$\cdots$$

$$\alpha_1 e^x + 2^{n-1}\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n^{n-1}\alpha_n e^{nx} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & n \\ 1^2 & 2^2 & & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & & n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^x \\ \alpha_2 e^{2x} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由范德蒙德行列式可知

$|A| \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_1 e^x = \alpha_2 e^{2x} = \cdots = \alpha_n e^{nx} = 0. \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$

定义：设 $S \subset V$. 如果

(i) S 线性无关

(ii) $\forall \vec{v} \in V \setminus S$, $S \cup \{\vec{v}\}$ 是线性相关的

即 $\vec{v} \in \langle S \rangle$

则称 S 是 V 中一个极大线性无关集

引理：设 $S \subset V$ 是一个线性无关集

则 $\exists\, T \subset V$. 使得

(i) $S \subset T$. (ii) T 为极大线性无关集

证明 需要超限归纳法.

引理3.1 设 $m\in\mathbb{Z}^+$，V 中线性无关集至多含有 m 个元素. 设 S 是 V 中线性无关集，则存在 V 中的极大线性无关集 T 包含 S.

证：如果 S 本身是极大线性无关集，则引理成立. 否则 $\exists\,\vec{v}_1\in V$，使得

$$S_1=S\cup\{\vec{v}_1\}$$

是线性无关集. 对 S_1 重复上述步骤.

如果 S_1 是极大线性无关集，则引理成立. 否则 $\exists\,\vec{v}_2\in V$，使得

$$S_2=S\cup\{\vec{v}_1\}\cup\{\vec{v}_2\}$$

是线性无关集，注意到

$$\mathrm{card}(S)<\mathrm{card}(S_1)<\mathrm{card}(S_2)\cdots$$

该步骤至多重复 $m-\mathrm{card}(S)$ 次. 于是引理成立.

引理3.2 设 $S\subset V$ 是极大线性无关集，$T\subset V$ 是线性无关集

如果 $\mathrm{card}(S)<\infty$，则 ~~$\mathrm{card}(T)\leq$~~

$$\mathrm{card}(T)\leq\mathrm{card}(S).$$

证：设 $S=\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\}$. $T=\{\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_\ell\}$

假设 $\ell>k$

因为 S 是极大线性无关集.

$\forall j\in\{1,\cdots\ell\}$ $\exists\, a_{1j},\cdots a_{kj}\in F$

使得
$$\vec{w}_j=a_{1j}\vec{v}_1+\cdots+a_{kj}\vec{v}_k=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{kj}\end{pmatrix}$$

令
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1\ell}\\ a_{21}&a_{22}&&a_{2\ell}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&&a_{k\ell}\end{pmatrix}.$$ 则

$$(\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_\ell)=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)A \qquad (*)$$

$\because\ \ell>k$ $\exists\,\alpha_1,\cdots\alpha_\ell\in F$. 不全为零

使得 $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_\ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$$\alpha_1\vec{w}_1+\cdots+\alpha_\ell\vec{w}_\ell=(\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_\ell)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_\ell\end{pmatrix}=(\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_\ell\end{pmatrix}=\vec{0}$$

于是 $l\le k$. □

推论3.1 设 $S,T\subset V$ 是极大线性无关集
如果 S,T 都是有限集，则

$$\mathrm{card}(S)=\mathrm{card}(T).$$

证：由引理3.2 $\mathrm{card}(S)\ge\mathrm{card}(T)$
且 $\mathrm{card}(T)\ge\mathrm{card}(S)$ □

定义：设 $S\subset V$ 是极大线性无关集
如果 S 有限，则 $\mathrm{card}(S)$ 称为 V 在 F 上的维数，记为

$$\dim_F V \quad 或 \quad \dim V.$$

特别地 $\dim\{\vec{0}\}=0$.

例：$\dim F_n[x]=n$
$\{1,x,\dots,x^{n-1}\}$ 是极大线性无关组

注：若 V 没有有限的极大线性无关集，则 $\dim_F V:=\infty$.

定义：设 $B\subset V$ 是线性无关集
如果 $\forall \vec{v}\in V$，$\vec{v}$ 是 B 中某些向量的线性组合，即 $V=\langle B\rangle$
则称 B 是 V 的一组基.

注：(i) 若 B 是 V 的一组基. $\Leftrightarrow$
B 是极大线性无关集.
(ii) 任何线性空间都有基
当 $\dim V<\infty$，这是引理3.1 的直接推论.

引理3.1 这直接导致

定理3.1 设 $\dim V<\infty$，$S\subset V$ 是线性无关集. 则存在 V 的基底 B 使得 $S\subset B$.

注：该定理称为基扩充定理

注：设 B 是 V 的一组基
则 $\dim V=\mathrm{card}(B)$.

例: $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$, $\{1,\sqrt{-1}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一组基. 于是 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$.

例: 证明 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\infty$

由 Eisenstein 判别法 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

x^n-2 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约

设 $\theta_n=\sqrt[n]{2}\in\mathbb{R}$.

$$U=\langle\theta_n^0,\theta_n,\dots,\theta_n^{n-1}\rangle$$

先证: $\theta_n^0,\theta_n,\dots,\theta_n^{n-1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关

假设 $\exists\,\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}\in\mathbb{Q}$, 不全为零

使得 $\alpha_0+\alpha_1\theta_n+\dots+\alpha_{n-1}\theta_n^{n-1}=0$

令 $p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$

则 $p\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $p\neq0$. 则 $p(\theta_n)=0$

因为 x^n-2 不可约且 $\deg p<n$

所以 $\gcd(p,x^n-2)=1$

于是 $\exists\,u,v\in\mathbb{Q}[x]$

$$u(x)p(x)+v(x)(x^n-2)=1$$

代入 θ_n 得

$$0=1 \quad \rightarrow\leftarrow$$

由此可知. $1,\theta_n,\dots\theta_n^{n-1}$ 线性无关

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}U=n$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\geq n$,

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\infty$.

有限维子空间的一个基本特征.

命题 3.1 设 $U_1,U_2\subset V$ 是两个子空间, 且 $U_1\subset U_2$. 如果 $\dim U_1=\dim U_2$ 且 $\dim U_2<\infty$

则 $U_1=U_2$

证: ~~设 $\vec{b}_1,\dots\vec{b}_s$ 是 U_1 的一组基 则 $\exists\,S\subset U_2$ 是 U_2 中的极大线性~~

命题3.2（维数公式）

设 $U_1, U_2 \subset V$ 是有限维子空间

则 $\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)$
$$=\dim U_1+\dim U_2$$

注：上学期利用基扩张定理给出命题3.1（第二章 → 基、维数转 → 命题1.4）

命题3.2（习题课），我们将给出"新"的证明。

§4. 子空间的直和

设 $U_1, \cdots, U_k \subset V$ 是子空间

定义：设 $U=U_1+\cdots+U_k$

如果 $\forall \vec{u} \in U$，存在唯一的 $\vec{u}_i \in U_i$，$i=1,\cdots,k$，使得
$$\vec{u}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k$$

则称 U 是 $U_1, \cdots, U_k$ 的直和

记为 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

命题4.1 利用上述定义中的记号

则下列命题等价。

(i) $U = U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

(ii) $\forall \vec{u}_1 \in U_1, \cdots, \vec{u}_k \in U_k$，
$\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k=\vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1=\cdots=\vec{u}_k=\vec{0}$

(iii) $\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$
$U_i \cap (U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n)=\{\vec{0}\}$

证：(i) $\Rightarrow$ (ii)
$\vec{0}=\vec{0}+\cdots+\vec{0}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k$
$\vec{0}, \vec{u}_i \in U_i \Rightarrow \vec{u}_i=\vec{0}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $\hat{U}_i=U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k$

由下标的任意性，只要证
$$U_1\cap\hat{U}_1=\{\vec{0}\}$$

即可

设 $\vec{v} \in U_1 \cap \hat{U}_1$. 则存在 $\vec{u}_2 \in U_2, \cdots, \vec{u}_k \in U_k$ 使得: $\vec{v} = \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_k$

即 $(-\vec{v}) + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_k = \vec{0}$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

设 $\vec{u} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_k = \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_k$

其中 $\vec{u}_i, \vec{v}_i \in U_i$, $i=1,\cdots,k$

则 $\vec{0} = (\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + \cdots + (\vec{u}_k - \vec{v}_k)$

$\vec{v}_1 - \vec{u}_1 = (\vec{u}_2 - \vec{v}_2) + \cdots + (\vec{u}_k - \vec{v}_k)$

于是 $\vec{v}_1 - \vec{u}_1 \in U_1 \cap \hat{U}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{u}_1$

同理 $\vec{u}_i = \vec{v}_i$, $i=2,3,\cdots,k$. ☒

注: 如果 $U_1 + \cdots + U_k$ 是直和

$\forall\, i_1, \cdots, i_s \in \{1, \cdots, k\}$, $i_1 < \cdots < i_s$

则 $U_{i_1} + \cdots + U_{i_s}$ 也是直和

命题4.2. 设 $U_1, \cdots, U_k \subset V$ 是子空间, $\dim U_i < \infty$, $i=1,\cdots,n$

令 $U = U_1 + \cdots + U_k$

则 $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$

$\iff \dim U = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$

证: 对 k 归纳

"$\Rightarrow$" 当 $k=1$ 时 命题显然成立

设 $k-1$ 时 命题成立. 当 k 时

$\dim U = \dim U_1 + \dim \hat{U}_1$ $(\hat{U}_1 = U_2 + \cdots + U_k)$

(维数公式且 $U_1 \cap \hat{U}_1 = \{\vec{0}\}$)

对 $\hat{U}_1$ 用归纳假设

~~当 $k=1$ 时结论成立. 设 $k-1$ 时~~

"$\Leftarrow$" 当 ~~则 $\dim \hat{U}_1 = \dim U_2 + \cdots \dim U_k$~~

~~结论成立.~~

$\sum_{i=1}^{k} \dim U_i = \dim U = \dim U_1 + \dim \hat{U}_1 - \dim(U_1 \cap \hat{U}_1)$

$\leq \dim U_1 + \dim \hat{U}_1$

$\leq \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k$

于是 $\dim(U_1 \cap \hat{U}_1) = \{\vec{0}\} \Rightarrow U_1 \cap \hat{U}_1 = \{\vec{0}\}$ ☒

同理 $\dim(U_i \cap \hat{U}_i\} = \{\vec{0}\}$