约定

设 V 是域 F 上的线性空间

回忆：设 $U_1, \cdots, U_m$ 是 V 的子空间

如果 $V = U_1 + \cdots + U_m$ 且

$\forall \vec{v} \in V \quad \exists!\ \vec{u}_1 \in U_1, \cdots, \vec{u}_m \in U_m$

使得 $\vec{v} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m$

则称 V 是 $U_1, \cdots, U_m$ 的直和

记为 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$

称 $U_1, \cdots, U_m$ 是 V 的一个直和分解

例：设 $\dim V = n$，U 是 V 的子空间. 则存在 V 的子空间 W. 使得

$$V = U \oplus W.$$

证：如果 $U = \{\vec{0}\}$. 则令 $W = V$. 则 $V = U + W$. 因为 $U \cap W = \{\vec{0}\}$

由命题4.1 $V = U \oplus W$

当 $U = V$ 时 取 $W = \{\vec{0}\}$

同理可证：$V = U \oplus W$.

设 $0 < \dim U < n$. 设 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_d$ 是 U 的一组基. 由基扩充定理

$\exists\ \vec{w}_{d+1}, \cdots, \vec{w}_n$ 使得

$\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_d, \vec{w}_{d+1}, \cdots, \vec{w}_n$ 是 V 的一组基

令 $W = \langle \vec{w}_{d+1}, \cdots, \vec{w}_n \rangle$

则 $\forall \vec{v} \in V \quad \exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_d, \beta_{d+1}, \cdots, \beta_n \in F$

使得 $\vec{v} = \underbrace{\alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_d \vec{u}_d}_{\vec{u}} + \underbrace{\beta_{d+1} \vec{w}_{d+1} + \cdots + \beta_n \vec{w}_n}_{\vec{w}}$

$\vec{u} \in U, \quad \vec{w} \in W \Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow V = U + W$

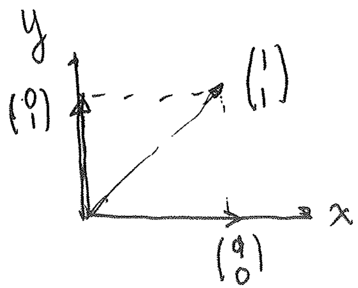
$\dim U + \dim W = d + n - d = n = \dim V$

由命题4.2. $V = U \oplus W$. $\blacksquare$

注：称 W 是 U 的一个直和补. 由于 U 的基底的选取和扩充不唯一. U 的直和补也不唯一。

例：设 $U=\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$ 构造 U 关于 $\mathbb{R}^2$ 的两个直和补

$$\mathbb{R}^2=U\oplus\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle=U\oplus\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$$



例：设 $V=\mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\tilde{E}=\{f\in V \mid f$ 是偶函数$\}$

$\tilde{O}=\{f\in V \mid f$ 是奇函数$\}$

证明：$\tilde{E},\tilde{O}$ 是 V 的子空间且

$$V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$$

证：$\forall f,g\in\tilde{O}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\forall x\in\mathbb{R}$

$$(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)$$
$$=-\alpha f(x)-\beta g(x)=-(\alpha f+g\beta)(x)$$

于是 $\tilde{O}$ 是子空间. 同理 $\tilde{E}$ 是子空间

$\forall f\in V$

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\in\tilde{E}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\in\tilde{O}}$$

$\Rightarrow\ V=\tilde{E}+\tilde{O}$

$f\in\tilde{E}\cap\tilde{O}$　　$f(x)=f(-x)$ 且 $f(x)=-f(-x)$

$\Rightarrow f(x)=-f(x)\ \Rightarrow 2f(x)=0\Rightarrow f(x)=0.$

$\Rightarrow\tilde{E}\cap\tilde{O}=\{0\}$

$\Rightarrow V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$.　　□

例 设 $\tilde{C}=\{f_c\in V\mid \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}\}$

$\tilde{C}$ 是 ~~任意~~ $\mathbb{R}$上常值函数的集合

$\tilde{E}_0=\{f\in\tilde{E}\mid f(0)=0\}$

证明 $\tilde{E}=\tilde{C}\oplus\tilde{E}_0$ 从而

$$V=\tilde{C}\oplus\tilde{E}_0\oplus\tilde{O}.$$

证：$\tilde{C}\subset\tilde{E}$. 可直接验证. $\tilde{C},\tilde{E}_0$ 是子空间

设 $f\in\tilde{E}$, $f(x)=c$. 则

$$f=c+(f-c),\quad c\in\tilde{C},\ f-c\in\tilde{E}_0$$

于是 $\tilde{E}=\tilde{C}+\tilde{E}_0$

设 $g\in\tilde{C}\cap\tilde{E}_0$ 则 $g(0)=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$

$g(x)=0$ ($\because g\in\tilde{C}$) $\Rightarrow g=0$

$\Rightarrow \tilde{E}=\tilde{C}\oplus\tilde{E}_0$

$\Rightarrow V=(\tilde{C}\oplus\tilde{E}_0)\oplus\tilde{O}$

$\Rightarrow V=\tilde{C}\oplus\tilde{E}_0\oplus\tilde{O}$ (命题4.1 (iii))

例 上述两个例子的矩阵版

设 $V=M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实方阵的线性空间

$\tilde{E}=\{A\in V\mid A^t=A\}$,

$\tilde{O}=\{A\in V\mid A^t=-A\}$

则 $V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$

令: $\tilde{D}=\{A\in V\mid A$ 对角阵$\}$

$\tilde{E}_0=\{A\in\tilde{E}\mid A$ 对角线元素都为零的矩阵$\}$

则 $V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$ 且 $\tilde{E}=\tilde{D}\oplus\tilde{E}_0$

令 M_{ij} 为在i行j列处为1, 其它处都是0的n阶方阵. $i,j\in\{1,\dots,n\}$

则 $B=\{M_{ij}\mid i,j\in\{1,\dots,n\}\}$ 是线性无关集

$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}$; $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M_{ij}$ (*)

$\Rightarrow V=\langle B\rangle\Rightarrow\dim V=n^2$

由(*) $\tilde{D}=\langle M_{11},\dots,M_{nn}\rangle\Rightarrow\dim\tilde{D}=n$

$\tilde{O}=\langle\{M_{ij}-M_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}\rangle$

$\tilde{E}_0=\langle\{M_{ij}+M_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}\rangle$

$\{M_{ij}+M_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}$ 和 $\{M_{ij}-M_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}$ 是线性无关集.

$\dim\tilde{O}=\dim\tilde{E}_0=\frac{n(n-1)}{2}$.

$\dim\tilde{D}+\dim\tilde{O}+\dim\tilde{E}_0=n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$

$=\dim V$

$$\Rightarrow V=\underbrace{\tilde{D}\oplus\tilde{E}_0}_{\tilde{E}}\oplus\tilde{O}$$

自己证.

∎

§5 商空间

设 $U \subset V$ 是子空间.

在 V 中定义二元关系 $\sim_U$ 如下:

$\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad \vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2$ 如果 $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U$

验证: "$\sim_U$" 是等价关系.

设 $\vec{v} \in V \quad \vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \in U \Rightarrow \vec{v} \sim_U \vec{v}$ (自反)

设 $\vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U \Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in U$

$\Rightarrow \vec{v}_2 \sim_U \vec{v}_1$ (对称)

设 $\vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2$ 和 $\vec{v}_2 \sim_U \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U, \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \in U$

$\Rightarrow (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_3) \in U \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \in U$

$\Rightarrow \vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_3$ (传递)

称 $\sim_U$ 是 V 上关于 U 的等价关系

引理5.1 设 $\vec{v} \in V$ 则 $\vec{v}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类是 $\vec{v} + U = \{\vec{v} + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$

证: $\forall\ \vec{w} \in \vec{v} + U$. 则 $\exists\ \vec{u} \in U$, 使得

$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow \vec{w} - \vec{v} = \vec{u} \in U$

$\Rightarrow \vec{w} \sim_U \vec{v}$

设 $\vec{w} \sim_U \vec{v}$ 则 $\vec{w} - \vec{v} \in U$.

$\Rightarrow \exists\ \vec{u} \in U$, $\vec{w} - \vec{v} = \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{w} \in \vec{v} + U$ $\square$

由此可知

$$V/\sim_U = \{\vec{v} + U \mid \vec{v} \in V\}$$

注: $\vec{v} + U = \vec{w} + U \Longleftrightarrow \vec{v} \sim_U \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} - \vec{w} \in U$

记 $V/\sim_U$ 为 V/U 我们将在 V/U 中定义加法和 $F \times V/U$ 中定义数乘, 使得 V/U 是 F 上的线性空间

① $+: V/U \times V/U \longrightarrow V/U$

$(\vec{v}_1+U, \vec{v}_2+U) \longmapsto (\vec{v}_1+\vec{v}_2)+U$

验证良定义：

设 $\vec{v}_1+U=\vec{w}_1+U$，$\vec{v}_2+U=\vec{w}_2+U$

$\vec{v}_1-\vec{w}_1=\vec{u}_1\in U$，$\vec{v}_2-\vec{w}_2=\vec{u}_2\in U$

$(\vec{v}_1+\vec{v}_2)-(\vec{w}_1+\vec{w}_2)\in U$

$\Rightarrow (\vec{v}_1+\vec{v}_2)+U=(\vec{w}_1+\vec{w}_2)+U$ (良定证)

交换律、结合律由 $(V,+,0)$ 中的规律自然导出.

$(\vec{v}+U)+(\vec{0}+U)=(\vec{v}+\vec{0})+U$

$=\vec{v}+U$

$(\vec{v}+U)+(-\vec{v}+U)=(\vec{v}-\vec{v})+U=\vec{0}+U$

于是 $(V/U, +, \vec{0}+U)$ 是交换群.

② 数乘：$F\times V/U \longrightarrow V/U$

$(\lambda, \vec{v}+U)\longmapsto(\lambda\vec{v}+U)$

验证良定义：设 $\vec{v}+U=\vec{w}+U$

则 $\vec{v}-\vec{w}\in U \Rightarrow \lambda(\vec{v}-\vec{w})\in U$

$\Rightarrow \lambda\vec{v}-\lambda\vec{w}\in U \Rightarrow \lambda\vec{v}+U=\lambda\vec{v}+W$. ✓

结合律和酉性自然满足.

验证分配律 设 $\alpha, \beta\in F$

$(\alpha+\beta)(\vec{v}+U)=(\alpha+\beta)\vec{v}+U$

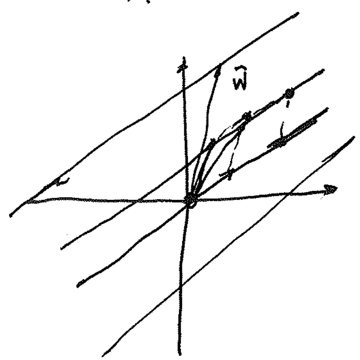
$=(\alpha\vec{v}+\beta\vec{v})+U=(\alpha\vec{v}+U)+(\beta\vec{v}+U)$

同样可验证.

$\alpha((\vec{u}+U)+(\vec{w}+U))=\alpha(\vec{u}+U)+\beta(\vec{w}+U)$.

称 $(V/U, +, \vec{0}+U, 数乘)$ 是 V 关于子空间 U 的商空间.

例：设 $V=\mathbb{R}^2$ $U=\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$



$V/U=\{\vec{v}+U \mid \vec{v}\in V\}$

$\vec{v}+U=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

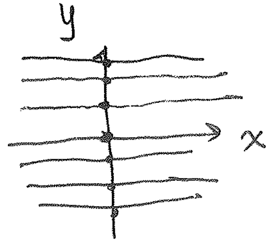
$=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}v_2\\v_2\end{pmatrix}+U\right) \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}v_1+v_2\\0\end{pmatrix}+U \,\middle|\, v_1,v_2\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}+U \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

例：$V=\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

$$V/\mathbb{R}=\{(a+b\sqrt{-1})+\mathbb{R} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{b\sqrt{-1}+\mathbb{R} \mid b\in\mathbb{R}\}$$



例：设 $V=F[x]$. $U=F_2[x]=\{f\in F[x] \mid \deg f<2\}$

$$V/U=\left\{\sum_{i=0}^{d} f_i x^i+F_2[x] \,\middle|\, f_0,\dots f_d\in F\right\}$$
$$=\left\{\sum_{i=2}^{d} f_i x^i+F_2[x] \,\middle|\, f_2,\dots f_d\in F\right\}$$

例 设 $V=F[x]$ $U=\{f\in F[x] \mid x^2\mid f\}$

$$V/U=\left\{\sum_{i=0}^{d} f_i x^i+U \,\middle|\, f_0,\dots f_d\in F\right\}$$
$$=\{(f_0+f_1x)+U \mid f_0,f_1\in F\}$$
$$=\langle 1+U,\ x+U\rangle$$

命题5.1 设 $\dim V=n<\infty$. $U\subset V$ 是子空间. 则
$$\dim V/U=\dim V-\dim U$$

证：设 $\dim U=d$. 把它 $\vec{u}_1,\dots \vec{u}_d$ 是 U 的一组基. 扩充为 V 的一组基 $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_d,\vec{u}_{d+1},\dots \vec{u}_n$

下证：$\vec{u}_{d+1}+U,\ \dots\ \vec{u}_n+U$ 是 V/U 的一组基.

$\forall \vec{v}\in V$ $\exists\, \alpha_1,\dots\alpha_d,\ \alpha_{d+1},\dots \alpha_n\in F$

使得 $\vec{v}=\underbrace{\alpha_1\vec{u}_1+\dots+\alpha_d\vec{u}_d}_{\vec{u}}+\underbrace{\alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\dots+\alpha_n\vec{u}_n}_{\vec{w}}$

$\cancel{\vec{v}+U=(\vec{u}+\vec{w})+U=(\vec{u}+U)}$

$\vec{v}-\vec{w}=\vec{u}\in U \Rightarrow \vec{v}+U=\vec{w}+U$

$\Rightarrow\ \vec{v}+U=\alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\dots+\alpha_n\vec{u}_n+U$

$=\alpha_{d+1}(\vec{u}_{d+1}+U)+\dots+\alpha_n(\vec{u}_n+U)$

即 $V/U=\langle \vec{u}_{d+1}+U,\dots,\vec{u}_n+U\rangle$

设 $\beta_{d+1},\cdots\beta_n\in F$ 使得

$$\beta_{d+1}(\vec{u}_{d+1}+U)+\cdots+\beta_n(\vec{u}_n+U)=\vec{0}+U$$

$$\Rightarrow(\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\cdots+\beta_n\vec{u}_n)+U=\vec{0}+U$$

$$\Rightarrow\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\cdots+\beta_n\vec{u}_n\in U$$

$\Rightarrow\exists\ \beta_1,\cdots\beta_d\in F$ 使得

$$\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\cdots+\beta_n\vec{u}_n=\beta_1\vec{u}_1+\cdots+\beta_d\vec{u}_d$$

$$\Rightarrow(-\beta_1)\vec{u}_1+\cdots+(-\beta_d)\vec{u}_d+\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\cdots+\beta_n\vec{u}_n=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\beta_{d+1}=\cdots=\beta_n=0 \quad \boxtimes$$

例：设 $U\subset V$ 是子空间

如果 $\dim U<\infty$ 且 $\dim U=\dim V$

则 $U=V$

证：$\dim V/U=\dim V-\dim U=0$

（命题5.1）

于是 $V/U=\{\vec{0}+U\}$

$\forall\vec{v}\in V\quad \vec{v}\in\vec{0}+U\Rightarrow\vec{v}-\vec{0}\in U$ $\boxtimes$

$\vec{v}\in U\Rightarrow V\subset U$

§6 线性映射

给定 $(V,+,\vec{0}_V,\cdot)$ 和 $(W,+,\vec{0}_W,\cdot)$ 是域 F 上的两个线性空间.

定义：设映射 $\varphi: V\longrightarrow W$. 如果 $\forall \alpha_1,\alpha_2\in F$, $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, $\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)=\alpha_1\varphi(\vec{v}_1)+\alpha_2\varphi(\vec{v}_2)$

则称 φ 是从 V 到 W 的线性映射

注：① 设 $\varphi: V\longrightarrow W$ 是线性映射.

$$\varphi(\vec{0}_V)=\vec{0}_W$$ （令定义中 $\alpha_1=\alpha_2=0$）

注：② 设 $\alpha_1,\dots\alpha_k\in F$, $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in V$

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(\vec{v}_i).$$

（利用定义对 k 归纳）

矩阵写法

$$\varphi\left((\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}\right)=(\varphi(\vec{v}_1),\dots,\varphi(\vec{v}_k))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$$

命题6.1 设 $\varphi: V\longrightarrow W$ 是线性映射, $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k\in V$. 如果 $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k$ 线性相关

则 $\varphi(\vec{v}_1),\dots\varphi(\vec{v}_k)$ 也线性相关

证：设 $\alpha_1,\dots\alpha_k\in F$. 不全为零使得

$$(\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}=\vec{0}_W$$

则 $$(\varphi(\vec{v}_1),\dots\varphi(\vec{v}_k))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}=\varphi(\vec{0}_V)=\vec{0}_W$$

$\Rightarrow$ $\varphi(\vec{v}_1),\dots\varphi(\vec{v}_k)$ 线性相关 □

命题6.2 设 $\varphi: V\longrightarrow W$ 是线性映射

(i) 如果 U 是 V 的子空间, 则 $\varphi(U)$ 是 W 的子空间

(ii) 如果 Z 是 W 的子空间, 则 $\varphi^{-1}(Z)$ 是 V 的子空间

证：见上学期讲义. 第2章. 线性映射 命题3.2 □

定义：设 $\varphi: V \to W$ 是线性映射

φ 的核是 $\{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$ 记为 $\ker(\varphi)$

φ 的像是 $\{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V, \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\}$ 记为 $\mathrm{im}(\varphi)$.

注：因为 $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{\vec{0}_W\})$ 和 $\mathrm{im}(\varphi) = \varphi(V)$

所以核与像都是子空间.

定理6.1 设 $\varphi: V \to W$ 是线性映射

则 φ 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_V\}$

证："$\Rightarrow$" $\because$ $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ 且 φ 是单射

$\therefore$ $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_V\}$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ 使得 $\varphi(\vec{v}_1) = \varphi(\vec{v}_2)$

则 $\cancel{\varphi(\vec{v}_1 - \vec{v}_2}$ $\varphi(\vec{v}_1) - \varphi(\vec{v}_2) = \vec{0}_W$

$\because \varphi$ 线性 $\therefore$ $\varphi(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}_W$

于是 $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker(\varphi)$.

$\because$ $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_V\}$ $\therefore$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $\square$

例：验证下列映射是线性映射，确定它们的核与像.

(i) $\varphi: F^n \longrightarrow F^m$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 其中 $A \in F^{m\times n}$ φ

$\ker(\varphi)$ 是 $A\vec{x} = \vec{0}_m$ 的解空间

$\mathrm{im}(\varphi) = \langle \vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)} \rangle$.

(ii) $\varphi: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$f(x) \longmapsto f'(x)$.

$\ker(\varphi) = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}[x]$

(iii) $\varphi: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

$f(x) \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

$\ker(\varphi) = \{0\}$ $\quad$ $\mathrm{im}(\varphi) \subsetneq C[a,b]$.

(iv) 设 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ 是子空间

直和分解：则 $\forall \vec{v} \in V$

$\exists!$ $\vec{u}_1 \in U_1, \cdots, \vec{u}_k \in U_k$ 使得

$\vec{v} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_k$

定义：$P_i:$ $V \longrightarrow V$

$\vec{v} \longmapsto \vec{u}_i$ $\quad i = 1, 2, \ldots k$.

称为 V 在 U_i 上的投影.

验证 P_i 是线性映射. $i=1,2,\cdots k$

只需验证 P_1 既可.

设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. $\alpha,\beta\in F$

则 $\exists!$ $\vec{x}_1\in U_1,\cdots,\vec{x}_k\in U_k$, $\vec{y}_1\in U_1,\cdots y_k\in U_k$

使得 $\vec{x}=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_k$, $\vec{y}=\vec{y}_1+\cdots+\vec{y}_k$

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\underbrace{(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{y}_1)}_{\in U_1}+\underbrace{(\alpha\vec{x}_2+\beta\vec{y}_2)}_{\in U_2}+\cdots+\underbrace{(\alpha\vec{x}_k+\beta\vec{y}_k)}_{\in U_k}$$

$$P_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{y}_1=\alpha P_1(\vec{x})+\beta P_1(\vec{y})$$

P_1 是线性的

$P_1(\vec{x})=0 \iff \vec{x}_1=\vec{0} \iff \vec{x}=\vec{0}+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_n$

$\iff \vec{x}\in U_2+\cdots+U_k$

于是 $\ker(P_1)=U_2+\cdots+U_k$

容易验证 $\mathrm{im}(P_1)=U_1$

($\because$ $\mathrm{im}(P_1)\subset U_1$ 且 $\forall\vec{u}_1\in U_1$, $P_1(\vec{u}_1)=\vec{u}_1$)

(V) 设 U 是 V 的子空间

$$\pi:\ V\longrightarrow V/U$$
$$\vec{v}\longmapsto \vec{v}+U$$

$\forall\ \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$. $\alpha_1,\alpha_2\in F$

$$\pi(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)=(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)+U$$
$$=\alpha_1(\vec{v}_1+U)+\alpha_2(\vec{v}_2+U)=\alpha_1\pi(\vec{v}_1)+\alpha_2\pi(\vec{v}_2)$$

$\pi(\vec{v})=\vec{0}_V+U \iff \vec{v}+U=\vec{0}_V+U$

$\iff \vec{v}\sim_U\vec{0}_V \iff \vec{v}-\vec{0}\in U \iff \vec{v}\in U$

于是 $\ker\pi=U$. $\mathrm{im}(\pi)=V/U$.

例: $\mathrm{Map}(S,W)=\{\varphi\mid\varphi:S\to W\}$ φ 是任意映射

其中 S 是非空集合.

$\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in \mathrm{Map}(S,W)$

$$\varphi_1+\varphi_2:\ S\longrightarrow W$$
$$s\longmapsto \varphi_1(s)+\varphi_2(s)$$

$\forall\alpha\in F$. $\varphi\in V$

$$\alpha\varphi:\ S\longrightarrow W$$
$$s\longmapsto \alpha\varphi(s).$$

$$O_S: \begin{array}{l} S \longrightarrow W \\ s \longmapsto \vec{O}_W \end{array}$$

则 $(\mathrm{Map}(S,V), +, O_S, \text{数乘})$ 是F上的线性空间. 其验证过程与 $\mathrm{Func}(S,F)$ 相同.

定理6.2 令 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从V到W的所有线性映射的集合. 则 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是 $\mathrm{Map}(V,W)$ 的子空间.

证: 设 $\alpha, \beta \in F$. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

只要验证 $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

令 $\theta = \alpha\varphi + \beta\psi$. 只要验证:

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$. $\lambda \in F$

$$\theta(\vec{x}+\vec{y}) = \theta(\vec{x}) + \theta(\vec{y})$$

$$\theta(\lambda\vec{x}) = \lambda\theta(\vec{x})$$

即可

$$\begin{aligned}
\theta(\vec{x}+\vec{y}) &= (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{x}+\vec{y}) && [\theta\text{的定义}] \\
&= (\alpha\varphi)(\vec{x}+\vec{y}) + (\beta\psi)(\vec{x}+\vec{y}) && [\text{映射相加的定义}] \\
&= \alpha\varphi(\vec{x}+\vec{y}) + \beta\psi(\vec{x}+\vec{y}) && [\text{映射数乘的定义}] \\
&= \alpha(\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})) + \beta(\psi(\vec{x})+\psi(\vec{y})) && [\varphi,\psi\text{线性}] \\
&= [\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\psi(\vec{x})] + [\alpha\varphi(\vec{y})+\beta\psi(\vec{y})] && [\text{交换结合律 分配}] \\
&= (\alpha\varphi)(\vec{x}) + (\beta\psi)(\vec{x}) + (\alpha\varphi)(\vec{y}) + (\beta\psi)(\vec{y}) && [\text{数乘定义}] \\
&= (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{x}) + (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{y}) && [\text{加法定义}] \\
&= \theta(\vec{x}) + \theta(\vec{y}) && [\theta\text{的定义}]
\end{aligned}$$

类似可证 $\theta(\lambda\vec{x}) = \lambda\theta(\vec{x})$. ∎

于是 $\theta \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ∎

定理6.3. 设 V_1, V_2, V_3 是F上的三个线性空间, $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(V_2,V_3)$. 则 $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in \mathrm{Hom}(V_1,V_3)$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2\circ\varphi_1"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
& V_3
\end{tikzcd}$$

证: 设 $\alpha, \beta \in F$. $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\varphi_2\circ\varphi_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}))$$

$= \varphi_2(\alpha\varphi_1(\vec{x}) + \beta\varphi_1(\vec{y}))$

$= \alpha\,\varphi_2(\varphi_1(\vec{x})) + \beta\,\varphi_2(\varphi_1(\vec{y}))$

$= \alpha\,(\varphi_2\circ\varphi_1)(\vec{x}) + \beta\,(\varphi_2\circ\varphi_1)(\vec{y})$ ☒

注：$\mathcal{O}_{V,W}\ V \longrightarrow W$ 称为零映射

$\vec{v} \longmapsto \vec{0}_W$

$\mathcal{E}_{V,W}\ V \longrightarrow V$ 称为恒同映射

$\vec{v} \longmapsto \vec{v}$

$\mathcal{O}_V \in Hom(V,W)$. $\mathcal{E}_V \in Hom(V,V)$

当定义域和值域已说明，可以把 $\mathcal{O}_V$，$\mathcal{E}_V$ 简记为 $\mathcal{O}$，$\mathcal{E}$.

例：设 $D:\ \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$f \longmapsto f'$

$a\in\mathbb{R}$　　$I:\ \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$f(x) \longmapsto \int_a^x f(x)\,dx$

计算 ~~D∘I I∘D 和D∘I~~

$D\circ I$ 和 $I\circ D$

$D\circ I(f(x)) = D\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

$D\circ I = \mathcal{E}$.

$I\circ D(f(x)) = \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$.

例 设 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ 是子空间直和分解. ~~P_i 是~~ $P_i \in Hom(V,V)$ 是 V 到 U_i 的投影，$i=1,2..n$

证明：(i) $\forall\, i\in\{1,\cdots n\}$　$P_i\circ P_i = P_i$

(ii) $\forall\, i,j\in\{1,\cdots n\}$, $i\neq j$

$P_i\circ P_j = \mathcal{O}_V$

(iii) $P_1 + \cdots + P_k = \mathcal{E}_V$.

证：设 $\vec{v}\in V$. $\exists!\ \vec{u}_1\in U_1, \cdots, \vec{u}_k\in U_k$

使得 $\vec{v} = \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_k$

$P_i(\vec{v}) = \vec{u}_i$

$P_i\circ P_i(\vec{v}) = P_i(\vec{u}_i)$

$\because \vec{u}_i = \cancel{\vec{0}}\vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{u}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$

$\Rightarrow P_i(\vec{u}_i) = \vec{u}_i \Rightarrow P_i(\vec{v}) = P_i\circ P_i(\vec{v}) \Rightarrow P_i = P_i\circ P_i$

设 $i\neq j$ $\quad P_j(\vec{v})=\vec{u}_j$

$P_i\circ P_j(\vec{v}) = P_i(\vec{u}_j)$

$$\vec{u}_j = \vec{0}+\cdots+\underset{i}{\vec{0}}+\vec{0}+\cdots+\underset{j-1}{\vec{0}}+\vec{u}_j+\underset{j+1}{\vec{0}}+\cdots+\vec{0}$$

$\Rightarrow P_i(\vec{u}_j)=\vec{0} \Rightarrow P_i\circ P_j(\vec{v})=\vec{0}$

$\Rightarrow P_i\circ P_j=\vec{0}$

$(P_1+\cdots+P_k)(\vec{v}) = P_1(\vec{v})+\cdots+P_k(\vec{v})$

$=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_k=\vec{v} \Rightarrow P_1+\cdots+P_k=\mathcal{E}$ □

回忆: $f: S\to T$. 映射

(S, T 集合)

$\forall s_1, s_2\in S$ $\quad s_1\sim_f s_2$ 如果 $f(s_1)=f(s_2)$

$\sim_f$ 是等价关系. $\quad S/\sim_f=\{\bar{s}\mid s\in S\}$

见~~上学期~~. 第一章 等价关系 → page 7

映射的分解

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & T \\ S/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ 映射 $\bar{f}$ 使得 $f=\bar{f}\circ\pi$.

$\bar{f}: S/\sim_f \longrightarrow T$ $\quad$ 良定义

$\bar{s} \longmapsto f(s)$

验证: $\forall s\in S$

$\bar{f}\circ\pi(s)=\bar{f}(\bar{s})=f(s)$.

等价关系. $\forall s\in S$ $\quad f(s)=f(s)\Rightarrow s\sim_f s$

设 $x\sim_f y$. $f(x)=f(y)\Rightarrow f(y)=f(x)\Rightarrow y\sim_f x$

设 $x\sim_f y$, $y\sim_f z \Rightarrow f(x)=f(y)$, $f(y)=f(z)$

$\Rightarrow f(x)=f(z) \Rightarrow x\sim_f z$

$\bar{f}$ 良定义: 设 $x, s\in\bar{s}$ $\Rightarrow$ ~~$x+y=s$~~ $x\sim_f s$

$\Rightarrow \bar{x}=\bar{s}$

$\bar{f}(\bar{x})=f(x)$, $\bar{f}(\bar{s})=f(s)$

$\because x\sim_f s \Rightarrow f(x)=f(s)$. 良定义.

单射: $\bar{f}(\bar{x})=\bar{f}(\bar{y}) \Rightarrow f(x)=f(y)$

$\Rightarrow x\sim_f y \Rightarrow \bar{x}=\bar{y}$

复合 $\forall s\in S$

$\bar{f}\circ\pi(s)=\bar{f}(\bar{s})=f(s)$

$\Rightarrow f=\bar{f}\circ\pi$.

唯一性. 设 $f=g\circ\pi$. $\forall f(s)=g(\bar{s}) \Rightarrow g=\bar{f}$

定理 (线性映射~~基本~~分解定理)

设 $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$. $\pi: V\to V/\ker(\varphi)$ 是商映射. 则 $\exists!$ ~~线~~线性映射 $\bar{\varphi}: V/\ker(\varphi)\to W$

使得 $\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$

证:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\ & V/\ker(\varphi) \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$.

证: 设 $U=\ker(\varphi)$

设 $\vec{x},\vec{y}\in V$

$\vec{x}\sim_\varphi\vec{y} \Leftrightarrow \varphi(\vec{x})=\varphi(\vec{y})$

$\Leftrightarrow \varphi(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}_W \Rightarrow \vec{x}-\vec{y}\in\ker(\varphi)=U$

$\Leftrightarrow \vec{x}\sim_U\vec{y}$

于是 $\overline{\vec{x}}=\vec{x}+U$ 且 $V/\sim_\varphi = V/U$

由映射分解定理

$\exists\, \bar{\varphi}: V/U \longrightarrow W$ 单射. 使得

$\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$.

由前面的例子可知 π 是 $\mathrm{Hom}(V, V/U)$

只要验证: $\bar{\varphi}\in\mathrm{Hom}(V/U, V)$ 即可

$\forall\, \alpha,\beta\in F$. $\vec{x},\vec{y}\in V$

$\bar{\varphi}(\alpha(\vec{x}+U)+\beta(\vec{y}+U))$

$=\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})$

$=\bar{\varphi}((\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})+U)$

$=\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$

$=\alpha\bar{\varphi}(\vec{x}+U)+\beta\bar{\varphi}(\vec{y}+U)$ □

$\Rightarrow \bar{\varphi}$ 线性

$\boxed{\text{任何线性映射是线性满射和线性单射的复合.}}$

例: $\mathrm{tr}: F^{n\times n} \longrightarrow F$

$X \longmapsto \mathrm{tr}(X)$

设 $X=(x_{ij})_{n\times n}$, $\mathrm{tr}(X)=x_{11}+\cdots+x_{nn}$

设 $Y=(y_{ij})_{n\times n}$. $\alpha.\beta\in F$

$\mathrm{tr}(\alpha X+\beta Y)$

$=\mathrm{tr}((\alpha x_{ij}+\beta y_{ij}))$

$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_{ii}+\beta y_{ii})=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_{ii}+\beta\sum_{i=1}^{n}y_{ii}$

$=\alpha\,\mathrm{tr}(X)+\beta\,\mathrm{tr}(Y)$. 于是

tr 是线性映射.

$X\in\ker(\mathrm{tr}) \Longleftrightarrow x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$

$\Rightarrow \dim\ker(\mathrm{tr})=n^2-1$

证法1. $x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$ 是 $X=(x_{ij})_{n\times n}$

唯一的限制. 于是 x_{ij}, $i=1,\cdots n$, $j=1\ldots n$

满足一个系数矩阵秩为1的线性齐次方程.

方法2: $\mathrm{im}(X)=F$ $\mathrm{tr}(X)$

$\mathrm{im}(\mathrm{tr})=F$ $\dim(\mathrm{im}(\mathrm{tr}))=1$

$\because \dim\ker(\mathrm{tr})+\dim\mathrm{im}(\mathrm{tr})=n^2$

$\therefore \dim\ker(\mathrm{tr})=n^2-1$.