回忆：设 S, T 是两个集合

$f: S \longrightarrow T$ 是映射.

定义：$\forall s_1, s_2 \in S$，$s_1 \sim_f s_2$

如果 $f(s_1) = f(s_2)$. 称 $\sim_f$ 是 S 上的等价关系.

$\pi_f: S \longrightarrow S/\sim_f$ 是商映射

定理（映射分解）$\exists!$ 单射 $\bar{f}: S/\sim_f \to T$

使得 $f = \bar{f} \circ \pi_f$，即：

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & & T \\
& S/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

于是任何映射可以分解为一个满射和一个单射的复合

定理（线性映射分解定理）

设 V, W 是 F 上的线性空间，~~其中~~ $\varphi \in Hom(V,W)$.

π 是从 $\cancel{V/ker(\varphi)}$ V 到 $V/ker(\varphi)$ 的商映射.

则 $\exists!$ 线性映射 $\bar{\varphi}: V/ker(\varphi) \longrightarrow W$ 使得

$\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ 且 $\bar{\varphi}$ 是单射.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\
& V/ker(\varphi) \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

证：定义等价关系 $\sim_\varphi$ 如下

$\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$. $\vec{v_1} \sim_\varphi \vec{v_2}$ 如果 $\varphi(\vec{v_1}) = \varphi(\vec{v_2})$.

记 $K_\varphi = ker(\varphi)$.

$\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, $\vec{v_1} \sim_\varphi \vec{v_2} \iff \varphi(\vec{x_1}) = \varphi(\vec{x_2})$

$\iff \varphi(\vec{v_1}) - \varphi(\vec{v_2}) = \vec{0}_W \iff \varphi(\vec{x_1} - \vec{v_2}) = \vec{0}_W$

$\iff \vec{v_1} - \vec{v_2} \in K_\varphi \iff \vec{v_1} \sim_{K_\varphi} \vec{v_2}$

即：$\vec{v_1}$ 与 $\vec{v_2}$ 关于映射 φ 等价当且仅当 $\vec{v_1}$ 与 $\vec{v_2}$ 关于子空间 K_φ 等价.

于是 $V/\sim_\varphi = \cancel{W}/K_\varphi$ 且商映射

$\pi_\varphi: V \to V/\sim_\varphi$ 等于映射 $\pi: V \to V/K_\varphi$

由映射分解定理，$\exists!\ \overline{\varphi}: V/K_\varphi \to W$

且 $\overline{\varphi}$ 是单射，使得 $\varphi = \overline{\varphi}\circ\pi$.

现在我们只需验证：$\overline{\varphi}$ 是线性的

为此 我们注意到基本事实

$$\forall\ \vec{v} \in V$$

$$\varphi(\vec{v}) = \overline{\varphi}\circ\pi(\vec{v}) = \overline{\varphi}(\vec{v}+K_\varphi)$$

即：$$\boxed{\overline{\varphi}(\vec{v}+K_\varphi) = \varphi(\vec{v})} \quad (*)$$

验证：$\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in F$，$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$

$$\overline{\varphi}\left(\alpha_1(\vec{v_1}+K_\varphi)+\alpha_2(\vec{v_2}+K_\varphi)\right) = \overline{\varphi}\left((\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2})+K_\varphi\right)$$

$$\underset{(*)}{=} \varphi(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}) = \alpha_1\varphi(\vec{v_1})+\alpha_2\varphi(\vec{v_2})$$

$$\underset{(*)}{=} \alpha_1\overline{\varphi}(\vec{v_1}+K_\varphi)+\alpha_2\overline{\varphi}(\vec{v_2}+K_\varphi) \quad \square$$

注：一个线性映射是一个线性满射和一个线性单射的复合.

§7 有限维线性空间的坐标

约定：在本节中 V 是域 F 上的线性空间 $\dim V < \infty$.

~~命题~~ 1. 设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组基，则 $\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$，使得

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e_1} + \dots + \alpha_n\vec{e_n} \quad (\star)$$

证：存在性即基底的定义

唯一性：再设 $\vec{v} = \beta_1\vec{e_1} + \dots + \beta_n\vec{e_n}$，$\beta_i \in F$

由 $(\star)$ $(\alpha_1-\beta_1)\vec{e_1} + \dots + (\alpha_n-\beta_n)\vec{e_n} = \vec{0}$

$\because\ \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 线性无关

$\therefore\ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. $\square$

定义：称 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ~~为~~ V 在基底 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的坐标.

例: $V=F^n$, $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{e_n}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 则 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 是 $\vec{x}$ 在 $\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}$ 下的坐标

例: 设 $V=F_n[x]$, $\vec{e_i}=x^{i-1}$, $i=1,\dots n$

$$f(x)=f_0+f_1x+\cdots+f_{n-1}x^{n-1},\quad f_0,\dots,f_{n-1}\in F$$

$$=f_0\vec{e_1}+f_1\vec{e_2}+\cdots+f_{n-1}\vec{e_n}$$

$\begin{pmatrix}f_0\\\vdots\\f_{n-1}\end{pmatrix}$ 是 f 在 $\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}$ 下的坐标

例: $V=F^{n\times n}$ $\vec{e_{ij}}=M_{ij}$. 其中 M_{ij} 在第 i 行 j 列处为 1, 在其它处都是零. $i,j\in\{1,\dots n\}$ 设 $X=(x_{ij})_{n\times n}\in V$

$$X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\vec{e_{ij}}$$

于是 $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\\\vdots\\x_{1n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}$ 是 X 在 $\vec{e_{11}},\vec{e_{21}},\dots,\vec{e_{n1}},\dots,\vec{e_{1n}},\vec{e_{2n}},\dots,\vec{e_{nn}}$ 下的坐标

引理7 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_m}\in V$. 则 $\exists!\ A\in F^{n\times m}$ 使得

$$(\vec{v_1},\dots,\vec{v_m})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A$$

证: 设 $\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$ 是 $\vec{v_j}$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的坐标, $j=1,\dots m$. 则

$$\vec{v_j}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}.$$

$$(\vec{v_1},\dots,\vec{v_m})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&&a_{nm}\end{pmatrix}}_{A}$$

~~A的唯一性 由坐标的~~

设 $B\in F^{n\times m}$ 使得

$$(\vec{v_1},\dots,\vec{v_m})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})B$$

则 $\vec{v_j}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\vec{B}^{(j)}$

于是 $\vec{B}^{(j)}$ 是 $\vec{v}_j$ 在 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 下的坐标

由坐标的唯一性 $\vec{A}^{(j)}=\vec{B}^{(j)}$, $j=1,\cdots m$ $\boxtimes$

$\Rightarrow A=B$

定理7.1 (基变换) 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基, $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n\in V$. 则

$\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基 $\Leftrightarrow$

$\exists!\ A\in GL_n(F)$ 使得

$$(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)A \quad (☆☆)$$

证: "$\Rightarrow$" 由引理7.1. $\exists!\ A\in F^{n\times n}$

使得 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)A$

因为 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 也是基. 所以 $\exists!\ ~~B~~ \in F^{n\times n}$

使得 $(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)B$

于是 $(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)AB$

因为 $(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)=(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)E$ 4

所以 $AB=E$ (引理7.1中唯一性)

即 $A\in GL_n(F)$

~~[illegible]~~ "$\Leftarrow$" 只要证 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 线性无关即可. 设 $\alpha_1,\cdots\alpha_n\in F$ 使得

$$(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\vec{0}$$

则由(☆☆)

$$(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$\because \vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 是线性无关的

$$\therefore A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$\because A$ 可逆 $\therefore \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$

即 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 线性无关 $\boxtimes$

注. 称(☆☆) A 为从基底 $\vec{e}_1\cdots\vec{e}_n$ 到 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 的转换矩阵.

例：在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

设 $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{w_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w_2}=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

问 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 和 $\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3}$ 是不是 $\mathbb{R}^3$ 的基底. 如果是，求从 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_n}$ 到新基底的转换矩阵

解：$$(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A}$$

$\because \det(A)\neq 0$ $\therefore$ A 可逆

$\therefore$ $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 是基 对应的转换矩阵为 A

$$(\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}}_{B}$$

$$B\to\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rank}(B)<3$$

$\Rightarrow$ $\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3}$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的基底.

推论1（坐标变换）

设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的两组基

A 是由 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 到 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 的转换矩阵. 设 $\vec{v}\in V$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 和 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 下的坐标分别是

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

证：$$\vec{v}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n})\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

因为 $(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A$

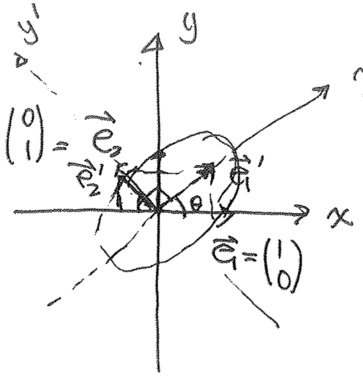
所以 $$\vec{v}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

由坐标的唯一性

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

∎

例：平面上的旋转 $V=\mathbb{R}^2$



$$\vec{e_1}' = (\cos\theta)\vec{e_1} + (\sin\theta)\vec{e_2}$$

$$\vec{e_2}' = (-\sin\theta)\vec{e_1} + (\cos\theta)\vec{e_2}$$

$$(\vec{e_1}', \vec{e_2}') = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{A}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

设 $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}$ 则

$$\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

求方程 $\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}x^2 = 1$ 在坐标变换

$$\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

在的形式

$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$

在新的坐标系下方程为

$$\frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]^2 = 1$$

化简得 $x'^2 + 2y'^2 = 1$

例：$V = F_n[x]$, $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in F$ 两两不同

令 $L_i = \dfrac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)}$

$i=1,2,\cdots n$.

证明 $L_1, \cdots L_n$ 是 $F_n[x]$ 的一组基.

求 ~~基~~ 从 $1, x, \cdots x^{n-1}$ 到 $L_1, \cdots L_n$ 的基变换矩阵. 和相应的坐标变换公式

证：~~若3证明~~ $\because \dim F_n[x] = n$.

$\therefore$ 只有证明 $L_1, \cdots L_n$ 线性无关即可

注意到 $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ $(i,j \in \{1, \cdots n\})$

设 $\alpha_1, \dots \alpha_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x) = 0$$

则 $\forall j \in \{1, \dots n\}$. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(\alpha_j) = 0$

于是 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_i \delta_{ii} = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow L_1(x), \dots L_n(x)$ 线性无关

断言 设 $p \in F[x]$ 则

$$p(x) = p(\alpha_1) L_1(x) + \dots + p(\alpha_n) L_n(x)$$

断言的证明. 设 $g(x) = p(\alpha_1) L_1(x) + \dots + p(\alpha_n) L_n(x)$

$$g(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i) L(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i) \delta_{ij}$$

$$= p(\alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots n$$

$\Rightarrow$ $p(x) - g(x)$ 以 $\alpha_1, \dots \alpha_n$ 为根

$\because \deg(p-g) < n \Rightarrow p = g$

(上学期. 第五章 定理5.5)

断言成立

由断言可知

$$x^j = \alpha_1^j L_1(x) + \dots + \alpha_n^j L_n(x) \quad j = 0, \dots n-1$$

即 $(1, x, \dots x^{n-1}) = (L_1, \dots L_n) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A}$

$$(L_1, \dots L_n) = (1, x, \dots x^{n-1}) A^{-1}$$

设 $p = p_0 + p_1 x + \dots + p_{n-1} x^{n-1}$

$= \beta_1 L_1 + \dots + \beta_n L_n$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ & \cdots & & \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\beta_i = p_0 + p_1 \alpha_i + \dots + p_{n-1} \alpha_i^{n-1} = p(\alpha_i)$, $i = 1, \dots n$ ∎

求多项式 g 使得 $g(\alpha_i) = \beta_i$. $i = 1, \dots n$

则 $g = \beta_1 L_1(x) + \dots + \beta_n L_n(x)$.

§8 线性同构.

本节中, V, W 是 F上的线性空间

定义: 如果存在 $\exists \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 是双射

则称 V 和 W 是线性同构的. 记为

$V \simeq W$

命题8.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 是双射, 则 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$

证: 设 $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$. 因为 φ 是双射, 所以

$\exists!\ \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ 使得

$\varphi(\vec{v_1}) = \vec{w_1}$ 和 $\varphi(\vec{v_2}) = \vec{w_2}$

由 φ^{-1} 的定义: $\varphi^{-1}(\vec{w_1}) = \vec{v_1}$, $\varphi^{-1}(\vec{w_2}) = \vec{v_2}$

设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, $\varphi(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}) = \alpha_1\varphi(\vec{v_1}) + \alpha_2\varphi(\vec{v_2})$

$= \alpha_1\vec{w_1} + \alpha_2\vec{w_2}$

由 φ^{-1} 的定义 $\varphi^{-1}(\alpha_1\vec{w_1} + \alpha_2\vec{w_2})$

$= \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} = \alpha_1\varphi^{-1}(\vec{w_1}) + \alpha_2\varphi^{-1}(\vec{w_2})$ ☐

推论8.1 "$\simeq$" 是等价关系

证: $\varepsilon: V \to V$ 是恒同映射, 线性双射

$\Rightarrow V \simeq V$. 自反性成立

设 $V \simeq W$. 则 $\exists \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 双射

~~使得~~ 由命题8.1. $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$. 于是

$V \simeq W$ 对称性成立

设 U 也是 F上的线性空间, 且

$U \simeq V$, $V \simeq W$

则 $\exists\ \varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 都是双射. 于是 $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(U, W)$ 也是双射.

由此 $U \simeq W$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

传递性成立.

命题8.2. 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 则

$$V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\varphi)$$

特别地, 当 φ 是满射时

$$V/\ker(\varphi) \simeq W$$

证：由线性映射分解定理，

∃ $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/\ker(\varphi), W)$ 单射 使得

$\varphi = \bar{\varphi}\circ\pi$ （$\cancel{\pi\circ\bar{\varphi}}$），其中 π 是从 V 到 $V/\ker(\varphi)$ 的商映射.

断言 $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(\bar{\varphi})$

断言的证明：设 $\vec{w} \in \mathrm{im}\,\varphi$，∃ $\vec{v} \in V$ 使得 $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$. $\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \bar{\varphi}\circ\pi(\vec{v})$

$= \bar{\varphi}(\vec{v} + \ker(\varphi)) \Rightarrow \vec{w} \in \mathrm{im}(\bar{\varphi})$

设 $\vec{w} \in \mathrm{im}(\bar{\varphi})$. ∃ $\vec{v} + \ker\varphi \in V/\ker(\varphi)$

使得 $\bar{\varphi}(\vec{v} + \ker\varphi) = \vec{w}$

$\bar{\varphi}\circ\pi(\vec{v}) = \vec{w} \Rightarrow \varphi(\vec{v}) = \vec{w}$

$\vec{w} \in \mathrm{im}(\varphi)$

断言成立.

因为 $\bar{\varphi}$ 是单射，所以 $\bar{\varphi}$ 是从 $V/\ker(\varphi)$ 到 $\mathrm{im}(\bar{\varphi})$ 的双射，线性

于是 $V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\bar{\varphi})$

$\Rightarrow V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\varphi)$ （∵断言）$\boxtimes$

推论 8.2 设 V_1, V_2 是 V 的子空间

则 $V_1/V_1\cap V_2 \simeq (V_1+V_2)/V_2$

证：设 $\varphi_1: V_1 \longrightarrow V_1+V_2$

$\vec{v}_1 \longmapsto \vec{v}_1$

φ_1 是线性的。设 $\pi_1: V_1+V_2 \longrightarrow (V_1+V_2)/V_2$

是商映射. 则 $\psi_1 = \pi_1\circ\varphi_1$ 是从 V_1 到 $(V_1+V_2)/V_2$ 的线性映射.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\pi_1\circ\varphi_1"'] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & (V_1+V_2)/V_2
\end{tikzcd}
$$

令 $\psi_1 = \pi\circ\varphi_1$

则 ψ_1 是线性映射

∀ $\vec{w} \in V_1+V_2$

∃ $\vec{v}_1 \in V_1$, $\vec{v}_2 \in V_2$

使得 $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

于是 $\vec{w} + V_2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + V_2 = (\vec{v}_1 + V_2) + (\vec{v}_2 + V_2)$

$= (\vec{v}_1 + V_2) + (\vec{0} + V_2) = \vec{v}_1 + V_2$.

$\psi_1(\vec{v_1}) = \pi_1 \circ \varphi_1(\vec{v_1}) = \pi_1(\vec{v_1}) = \vec{v_1} + V_2 = \vec{w} + V_2$

于是 ψ_1 是满射. ~~断言~~

断言: $\ker(\psi_1) = V_1 \cap V_2$

~~设~~ 断言的证明: $\vec{v} \in V_1 \cap V_2$

$\psi_1(\vec{v}) = \pi_1 \circ \varphi_1(\vec{v}) = \pi_1(\vec{v}) = \vec{v} + V_2 = \vec{0} + V_2$

$(\because \vec{v} \in V_2)$

$\Rightarrow \vec{v} \in \ker(\psi_1)$

设 $\vec{w} \in \ker(\psi_1) \subset V_1$

$\vec{0} + V_2 = \psi_1(\vec{w}) = \pi_1 \circ \varphi_1(\vec{w}) = \pi_1(\vec{w}) = \vec{w} + V_2$

$\Rightarrow \vec{w} \in V_2 \Rightarrow \vec{w} \in V_1 \cap V_2$.

断言成立

由~~命题~~ 8.2 $\quad V_1 / V_1 \cap V_2 \simeq V_1 + V_2 / V_2$ $\quad \boxed{\ }$

注: $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 称为"自然的"

如果 φ 的定义不依赖于基底的选择

例: $0_{V,W}: \begin{aligned} V &\longrightarrow W \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{0}_W \end{aligned}$

$\varepsilon: \begin{aligned} V &\longrightarrow V \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{v} \end{aligned}$

设 U 是 V 的子空间

$\pi: \begin{aligned} V &\longrightarrow V/U \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{v} + U \end{aligned}$

如果 $\exists \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 使得 φ 是双射且"自然" 则称 ~~φ~~ V, W 自然同构

例 由推论8.2

$V_1 / V_1 \cap V_2$ 自然同构于 $V_1 + V_2 / V_2$

定理8.1 设 $\dim V < \infty$, $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组基, $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n}$ 是 W 中任意向量

则 $\exists ! \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 使得

$\varphi(\vec{e_i}) = \vec{w_i}$, $i = 1, 2, \cdots n$.

证: $\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$

$$\varphi: V \longrightarrow W$$
$$\vec{x} \longmapsto x_1\vec{w_1}+\cdots+x_n\vec{w_n}$$

由坐标的唯一性，φ 是良定义的

且 $\varphi(\vec{e_i}) = \vec{w_i}$，$i=1,\dots,n$

再设 $\vec{y} = y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$，$\alpha, \beta \in F$

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \varphi\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i} + \beta\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{e_i}\right)$$
$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)\vec{e_i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)\vec{w_i}$$
$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)\varphi(\vec{e_i})\vec{w_i}}$$
$$= \alpha\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{w_i} + \beta\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{w_i}$$
$$= \alpha\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y})$$

于是 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 存在性得证

设 $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 满足 $\psi(\vec{e_i}) = \vec{w_i}$，$i=1,2,\dots,n$

于是

$$\psi(\vec{x}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}x_i\psi(\vec{e_i})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}x_i\vec{w_i} = \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \psi = \varphi \quad \square$$

例：设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的基，$\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$

则 $\exists!$ 线性函数 $f \in \mathrm{Hom}(V, F)$

使得 $f(\vec{e_i}) = \alpha_i$，$i=1,2,\dots,n$.

设 $\vec{x} = x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1})+\cdots+x_n f(\vec{e_n}) = \alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n$$

即 $\mathrm{Hom}(V, F)$ 可以看成 $F[x_1,\dots,x_n]$ 齐一次多项式的集合. 它们作为 F 上线性空间是同构的（0 被看为是齐1次的

定理8.2 设 V, W 是 F 上的有限维向量空间，则 $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

证："$\Rightarrow$" 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 是双射

$\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的基.

~~则~~ 令 $\vec{\varepsilon_i} = \varphi(\vec{e_i})$, $i=1,\cdots,n$

~~若~~ $\exists\, \alpha_1 \cdots \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1 \vec{\varepsilon_1} + \cdots + \alpha_n \vec{\varepsilon_n} = \vec{0_W}$$

则 $\alpha_1 \varphi(\vec{e_1}) + \cdots + \alpha_n \varphi(\vec{e_n}) = \vec{0_W}$

于是 $\varphi(\alpha_1\vec{e_1} + \cdots + \alpha_n\vec{e_n}) = \vec{0_W}$. 因为 φ 是单射

所以 $\alpha_1\vec{e_1} + \cdots + \alpha_n\vec{e_n} = \vec{0_V} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

$\forall \vec{w} \in W$. $\exists\, \vec{v} \in V$ 使得 $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$

设 $\vec{v} = \beta_1\vec{e_1} + \cdots + \beta_n\vec{e_n}$ 则

$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \beta_1\varphi(\vec{e_1}) + \cdots + \beta_n\varphi(\vec{e_n}) = \beta_1\vec{\varepsilon_1} + \cdots + \beta_n\vec{\varepsilon_n}$

于是 $\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_n}$ 是 W 的基. $\Rightarrow \dim W = \dim V$.

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n}$ 是 V 的基, $\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_n}$ 是 W 的基. 由定理 8.1 $\exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

使得 $\varphi(\vec{e_i}) = \vec{\varepsilon_i}$ $i=1,\cdots,n$

~~设 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} \in \ker(\varphi)$~~

~~则 $\varphi(\vec{x}) = x_1\vec{\varepsilon_1} + \cdots + x_n\vec{\varepsilon_n} = \vec{0_W}$~~

~~$\Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0_V}$~~

~~由定理~~ 同理 $\exists\, \psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$

使得 $\psi(\vec{\varepsilon_i}) = \vec{e_i}$, $i=1,\cdots,n$

$\psi \circ \varphi(\vec{e_i}) = \vec{e_i}$, $i=1,\cdots,n$

由唯一性 $\psi \circ \varphi = \mathcal{E}_V$

同理 $\varphi \circ \psi = \mathcal{E}_W$ 于是 $\psi = \varphi^{-1}$

φ 是双射. $V \simeq W$.

注: F 上的任何 n 维线性空间同构于 F^n.

推论 8.3 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 且 $\dim V < \infty$. 则

$$\dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim V$$

证: 由 命题 8.2

$$V/\ker(\varphi) \simeq \operatorname{im}(\varphi)$$

由定理 8.2 $\dim V/\ker(\varphi) = \dim \operatorname{im}(\varphi)$

由命题 5.1 $\dim V - \dim\ker(\varphi) = \dim \operatorname{im}(\varphi)$.

例：tr: $F^{n\times n} \longrightarrow F$

$(x_{ij})_{n\times n} \longmapsto x_{11}+x_{22}+\dots+x_{nn}$

$$\mathrm{im}(tr) = F$$

$$\dim(\ker(tr)) = \dim F^{n\times n} - \dim \mathrm{im}(tr) = n^2-1.$$

例 重新证明 维数公式：设 V 有限维

$V_1, V_2 \subset V$ 是子空间

则 $\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

证：由 推论8.2

$$V_1/V_1\cap V_2 \cong (V_1+V_2)/V_2$$

由 定理8.2

$$\dim\left(V_1/V_1\cap V_2\right) = \dim\left((V_1+V_2)/V_2\right)$$

由 命题5.1

$$\dim V_1 - \dim V_1\cap V_2 = \dim(V_1+V_2) - \dim V_2$$

∎

(对比 书上 P14 定理6 的证明)

~~§四 完全正交等方组~~

设 $\varphi_1,\dots,\varphi_k \in \mathrm{Hom}(V,V)$

如果：(i) $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\varphi_i\circ\varphi_i=\varphi_i$

(ii) $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$ $i\neq j$

$\varphi_i\circ\varphi_j=0$

则称 $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ 是一组正交等方的线性映射.

~~如果再满足~~

(iii) $\varphi_1+\dots+\varphi_k=\mathcal{E}$.

则称 $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ 是完全正交等方的

例：设 $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ 是子空间 $P_i: V\to V$ 是关于 U_i 直和分解 的投射. 由 §6 的例子 (p10) 可知 $P_1,\dots,P_k$ 是完全正交等方组

小结

设 V 是域 F 上的线性空间

空间: ~~$\dim V<\infty$~~ (如果 $\dim V=n$, $V\cong F^n$)

V
- 坐标空间 F^n
- 矩阵空间 $F^{m\times n}$
- 多项式空间 $F[x]$, $F_n[x]$
- 函数空间: $\mathrm{Func}(S,F)$, $\mathrm{Map}(S,V)$ $\mathrm{Hom}(V,W)$
- 扩域: $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$上 和 $\mathbb{Q}$上线性空间

子空间, 商空间 直和分解

维数与基底: 设 $\dim V<\infty$ V_1, V_2, U 是 V 的子空间

关于子空间的维数公式

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

关于商空间的维数公式

$$\dim V/U=\dim V-\dim U$$

关于直和分解的维数公式 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

$$\dim V=\dim U_1+\cdots+\dim U_k$$

基底与坐标 $\dim V<\infty$ $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的基底

$$\vec{x}=\underbrace{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}_{\text{基底}}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\leftarrow \text{坐标}$$

坐标关于基底是唯一的.

设 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 是 V 的另一组基 $\exists!\, A\in GL_n(F)$

$$(\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)A \leftarrow \text{转换矩阵}$$

设 $\vec{x}=(\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n')\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 坐标变换

线性映射 $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

φ 的实例:
- 零映射, 恒同映射
- 商映射, 关于直和分解的投影
- 加法 数乘 复合.

φ 的分解 $\varphi=$ 线性单射 $\circ$ 线性满射

φ 的维数公式, 设 $\dim V<\infty$

$$\dim\ker(\varphi)+\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=\dim V$$

φ 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\ker(\varphi)=\{\vec{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\dim(\mathrm{im}(\varphi))=\dim V$.

无穷维也成立

当 $\dim W<\infty$. φ 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\dim\mathrm{im}(\varphi)=\dim W$ $\Longleftrightarrow$ $\dim(V)-\dim\ker(\varphi)=\dim W$