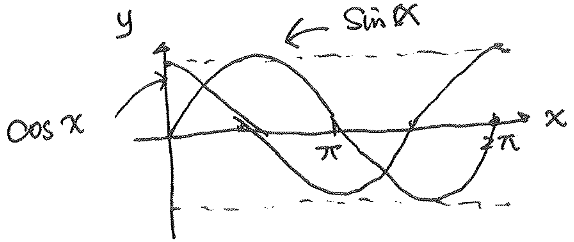
# §9 对偶空间 (dual spaces)




本节中 $V$ 是域 $F$ 上有限维向量空间

定义：$\mathrm{Hom}(V, F)$ 称为 $V$ 的对偶空间，记为 $V^*$

## §9.1 基底的对偶

定理9.1 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 $V$ 的一组基，则 $V^*$ 有唯一的一组基 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 满足

$$e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

特别地 $\dim V^* = \dim V$.

(称 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 为 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 的对偶基)

证：由定理8.1, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists!\, e_i^* \in V^*$ 使得 $e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$ $j = \{1, \dots, n\}$

只需验证：$e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 $V^*$ 的基

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0^*$，其中 $0^*: V \to F$, $\vec{v} \mapsto 0$. 即 $V^*$ 中的零元素

则 $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = 0^*(\vec{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

于是 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 线性无关

设 $f \in V^*$. $\beta_i = f(\vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$

令 $g = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i^*$. $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i^*(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{ij} = \beta_j = f(\vec{e}_j)$$

由定理8.1 可知 $f = g$.

于是 $V^* = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$

即 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 $V^*$ 的一组基

$e_1^*, \dots, e_n^*$ 的唯一性 由定理8.1 中的唯一性直接给出. □

例：$V=F^n$　$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\vec{e_n}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

令 $X_i:\ F^n\longrightarrow F$，$i=1\cdots n$

$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\longmapsto x_i$

可直接验证 $X_i\in V^*$ 且 $X_i(\vec{e_j})=\delta_{ij}$.

于是 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 的对偶基是 $X_1,\dots,X_n$

例 $V=F_n[x]$．基底 $1,x,\dots,x^{n-1}$

$C_i:\ F_n[x]\longrightarrow F$

$p=\sum_{i=0}^{n-1}p_ix^i\longmapsto p_i$

可直接验证：$C_i\in V^*$ 且 $C_i(x^j)=\delta_{ij}$，

$i,j\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

设 $D_i:\ F_n[x]\longrightarrow F_n[x]$

$p\longmapsto\frac{1}{i!}\frac{d^ip}{dx^i}$

$(i=0,1,\dots,n-1)$

$\varphi_0:\ F_n[x]\longrightarrow F$

$p\longmapsto p(0)$

$$\begin{tikzcd}
F_n[x] \arrow[r, "D_i"] \arrow[dr, "\varphi_0\circ D_i"'] & F_n[x] \arrow[d, "\varphi_0"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

$\boxed{C_i=\varphi_0\circ D_i}$

由定理8.1，只需验证

$\varphi_0\circ D_i(x^j)=\delta_{ij}$　$(i,j\in\{0,1,\dots,n-1\})$

当 $j<i$　$D_i(x^j)=0\Rightarrow\varphi_0\circ D_i(x^j)=0$

当 $j=i$　$D_i(x^j)=1\Rightarrow\varphi_0\circ D_i(x^j)=1$

当 $j>i$　$D_i(x^j)=j(j-1)\cdots(j-i+1)x^{j-i}$

$\Rightarrow\varphi_0 D_i(x^j)=0$

于是 $C_i=\varphi_0\circ D_i$

设 $p=(x-1)(x^2+2)\in F_4[x]$.

求 $p$ 中关于 $x$ 的系数

方法1：$C_1(p)=C_1(x^3-x^2+2x-2)=2$

方法2：$\varphi_0\cdot D_1(p)=\varphi_0\left((x^2+2)+2x(x-1)\right)$

$=2$.

例：$F^{m\times n}$ 中关于 $\{M_{ij}\mid i=1,\dots m,\ j=1,\dots n\}$

的对偶基（见书上习题）

**命题 9.1** 设 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_n}$ 是 $F^n$ 的一组基

令 $A=(\vec{a_1},\cdots\vec{a_n})$ 则 $\vec{a_1},\cdots\vec{a_n}$ 的对偶基是

$$(a_1^*,\cdots a_n^*)=(X_1,\cdots,X_n)(A^t)^{-1}$$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$(a_1^*,\cdots a_n^*)=(X_1,\cdots X_n)B$

且 $B=(b_{kl})_{n\times n}$

$$a_l^*=\sum_{k=1}^n b_{kl}X_k$$

$$\delta_{lj}=a_l^*(\vec{a_j})=\sum_{k=1}^n b_{kl}X_k(\vec{a_j})=\sum_{k=1}^n b_{kl}a_{kj}$$

$$(l,j\in\{1,\cdots n\})$$

即 $B^tA=E \Rightarrow A^tB=E \Rightarrow B=(A^t)^{-1}$

例：在 $F^3$ 中 求 $\vec{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ 的对偶基.

解 $A=(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3})=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$(a_1^*,a_2^*,a_3^*)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$a_1^*=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_3,\quad a_2^*=X_2,\quad a_3^*=\frac{1}{3}X_1-\frac{1}{3}X_3$$

$$a_1^*\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}X_1\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}X_3\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$

## §9.2 线性关系的对偶描述

**引理 9.1** 设 $\vec{v}\in V$. 则以下断言~~成立~~等价

(i) $\vec{v}=\vec{0}$ (ii) $\forall f\in V^*$. $f(\vec{v})=\vec{0}$

(iii) 设 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ 是 $V^*$ 的一组基

$$e_1^*(\vec{v})=\cdots=e_n^*(\vec{v})=0$$

证：(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然

(iii) $\Rightarrow$ (i) 假设 $\vec{v}\neq\vec{0}$. 则由 $\vec{v}$ 可扩充 $V$ 的一组基 $\vec{v}=\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots\vec{v_n}$

则可把 $\vec{v}$ 扩充为 $V$ 的一组基

$$\vec{v} = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$$

设 $v_1^*, v_2^*, \dots v_n^*$ 是其对偶基. 且

$$v_1^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \dots + \alpha_n e_n^*$$

则 $1 = v_1^*(\vec{v}) = \alpha_1 e_1^*(\vec{v}) + \alpha_2 e_2^*(\vec{v}) + \dots + \alpha_n e_n^*(\vec{v}) = 0$

$\rightarrow\leftarrow$. $\square$

推论 9.1 设 $\vec{u}, \vec{v} \in V$ 则下列断言等价

(i) $\vec{u} = \vec{v}$ (ii) $\forall f \in V^*$, $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$

(iii) 设 $e_1^*, \dots e_n^*$ 是 $V^*$ 的一组基, 使得

$$e_i^*(\vec{u}) = e_i^*(\vec{v}), \ i=1,\dots,n.$$

证: $\because \vec{u} = \vec{v} \iff \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$ $\therefore$ 推论9.1 可由引理 9.1 直接得出. $\square$

引理 9.2 设 $f_1, \dots f_m \in V^*$, $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in V$

设 $A = (f_i(\vec{v}_j))_{m \times k}$. 设 $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$

其中 $\alpha_1 \dots \alpha_k \in F$

则
$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{v}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{v}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

证: $\forall i \in \{1, \dots m\}$

$$\vec{A}_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = (f_i(\vec{v}_1), \dots f_i(\vec{v}_k)) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 f_i(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_k f_i(\vec{v}_k) = f_i(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k)$$

$$= \alpha_1 f_i(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_k f_i(\vec{v}_k)$$

$\square$

$$= f_i(\vec{v}).$$

引理 9.3 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$. 则下列断言

等价 (i) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性相关

(ii) $\forall f_1, \dots f_k \in V^*$ 矩阵 $(f_i(\vec{v}_j))_{k \times k}$ 不满秩

(iii) 设 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 $V^*$ 的基 矩阵 $(e_i^*(\vec{v}_j))_{n \times k}$ 的秩小于 $k$.

证: (i) $\Rightarrow$ (ii) 令 $A = (f_i(\vec{v}_j))_{k \times k}$

$\because \vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ 线性相关 $\therefore \exists\ \alpha_1, \dots \alpha_k \in F$ 不全为零, 使得 $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$

由引理 9.2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{0}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{0}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) < k.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)　　设 $B=(e_i^*(\vec{v_j}))_{n\times k}$

由 (ii) 可知　B 的任何 $k\times k$ 阶行列式

都为零，于是 $\mathrm{rank}(B)<k$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)　$\because \mathrm{rank}(B)<k$ $\therefore \exists\ \beta_1,\cdots\beta_k\in F$

不全为零，使得　$B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

由引理 9.2　　$e_i^*(\beta_1\vec{v_1}+\cdots+\beta_k\vec{v_k})=0,\ i=1,2\cdots n$

由引理 9.1　　$\beta_1\vec{v_1}+\cdots+\beta_k\vec{v_k}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 线性相关 ☒

推论 9.2　设 $\dim V=n$.　$\vec{v_1},\cdots\vec{v_n}\in V$

则 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_n}$ 是 V 的基 $\Longleftrightarrow$ 矩阵

$(e_i^*(\vec{v_j}))_{n\times n}$ 满秩. 其中 $e_1^*,\cdots,e_n^*$

是 $V^*$ 的一组基.

证明：在引理 9.3 中取 $k=n$. 运用

(i) 和 (iii) 的等价性.

定理 9.2　设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in V$,　$e_1^*,\cdots,e_n^*\in V^*$

是 $V^*$ 的一组基. 令 $A=(e_i^*(\vec{v_j}))_{n\times k}$

则 $\dim\langle\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\rangle=\mathrm{rank}(A)$.



证：设 $r=\mathrm{rank}(A)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(r)}$

线性无关. 令 $B=(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(r)})_{n\times k}$.

$\because \mathrm{rank}(B)=r$ $\therefore \vec{v_1},\cdots\vec{v_r}$ 线性无关

(引理 9.3. (i) $\Leftrightarrow$ (iii))

$\forall m\in\{r+1,\cdots k\}$　令 $B_m=(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(r)},\vec{A}^{(m)})$

则 $\mathrm{rank}(B_m)=r<r+1$.　于是

$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_r},\vec{v_m}$ 线性相关

$\Rightarrow \vec{v_m}\in\langle\vec{v_1},\cdots\vec{v_r}\rangle \Rightarrow \dim\langle\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\rangle=r$ ☒

例：设 $p_1,p_2,\cdots p_n\in F_{n-1}[x]$　$\alpha_1,\cdots\alpha_n\in F$

则　$\det(p_i(\alpha_j))_{\substack{i=1,\cdots n\\ j=1\cdots n}}=0$

证：$f_{\alpha_i}: \begin{array}{l}F_{n-1}[x]\to F\\ p(x)\mapsto p(\alpha_i)\end{array}$　可直接验证：

$f_{\alpha_i}\in F_{n-1}[x]^*$

$\because$ ~~$p_1,p_2,\cdots,p_n$~~ $\dim F_{n-1}[x]=n-1$, $\therefore p_1,\cdots p_n$ 线性相关

$\Rightarrow \det(p_i(\alpha_j))_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}=0$

(引理 9.3. (i) $\Leftrightarrow$ (iii))

更正：（引理9.3）设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in V$. 则下列断言等价

(i) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 线性相关

(ii) $\forall f_1, \cdots, f_k \in V^*$: 矩阵 $(f_i(\vec{v}_j))_{k\times k}$ 不满秩

(iii) 设 $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 是 $V^*$ 的一组基

矩阵 $(e_i^*(\vec{v}_j))_{n\times k}$ 的秩小于 $k$

证：(i) ⇒ (ii) ✓ (ii) ⇒ (iii) ✓

(iii) ⇒ (i) ✓ 设 $B = (e_i^*(\vec{v}_j))_{n\times k}$

$\because \operatorname{rank}(B) < k$. $\exists \beta_1, \cdots \beta_k \in F$ 不全为零

使得
$$B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

由引理9.2 $e_i^*(\beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k) = 0$, $i=1\cdots n$

由引理9.1 $\beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k$ 线性相关

☒



回忆：设 $\vec{v} \in V$

$$\varepsilon_{\vec{v}}: V^* \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto f(\vec{v})$$

易验证 $\varepsilon_{\vec{v}} \in V^{**}$.

# §9.3 自然同构

设 $\vec{v}\in V$. 定义 $\varepsilon_{\vec{v}}: V^* \longrightarrow F$

$f \longmapsto f(\vec{v})$

$\forall \alpha,\beta \in F$. $f, g \in V^*$

$\varepsilon_{\vec{v}}(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})+\beta g(\vec{v})$

$= \alpha\varepsilon_{\vec{v}}(f)+\beta\varepsilon_{\vec{v}}(g)$

于是 $\varepsilon_{\vec{v}}$ 是从 $V^*$ 到 $F$ 的线性函数. 即 $\varepsilon_{\vec{v}}\in V^{**}$

注: 上述验证并未用到 $f, g$ 是线性函数. 事实上, 令 $s\in S$

$\varepsilon_s$ $\mathrm{Func}(S, F) \longrightarrow F$ 是线性函数.

$f \longmapsto f(s)$

定理 9.3: $\varphi: V \longrightarrow V^{**}$ 是线性同构

$\vec{v} \longmapsto \varepsilon_{\vec{v}}$

证: 由 $\varepsilon_{\vec{v}}$ 的定义. $\varphi$ 是良定义的

$\forall \alpha,\beta\in F$, $\vec{u},\vec{v}\in V$

$\varphi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \varepsilon_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}}$

$\forall f\in V^*$ $\varepsilon_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}}(f) = f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})$

$\because$ $f$ 线性

$\therefore$ $\varepsilon_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}}(f) = \alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$

$= \alpha\varepsilon_{\vec{u}}(f)+\beta\varepsilon_{\vec{v}}(f)$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} = \alpha\varepsilon_{\vec{u}}+\beta\varepsilon_{\vec{v}} \Rightarrow \varphi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u})+\beta\varphi(\vec{v})$

于是 $\varphi$ 是线性的

由定理6.1. 要证 $\varphi$ 是单射, 只需证 $\varphi(\vec{v})=0^{**}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$

(其中 $0^{**}$ 是 $V^{**}$ 中的零元).

设 $e_1^*,\dots e_n^*$ 是 $V^*$ 的一组基

$0 = 0^{**}(e_i^*) = \varepsilon_{\vec{v}}(e_i^*) = e_i^*(\vec{v})$, $i=1..n$

$\vec{v}=\vec{0}$. $\varphi$ 是单射.

由引理 9.1

由线性映射维数公式

$\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim V$

$\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim V^{**} \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi)=V^{**}$

由定理 9.1

即 $\varphi$ 是满射. 于是 $\varphi$ 是线性同构.

注: $\because$ $\varphi$ 的定义与基底选取无关

$\therefore$ $\varphi$ 是自然同构. 即 $V$ 与 $V^{**}$

自然同构.

自然同构的应用

推论 9.3. 设 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ 是 $V^*$ 的基

则 $\exists!$ 基底 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\in V$, 使得

$$e_i^*(\vec{e}_j)=\delta_{ij},\quad i,j\in\{1,\cdots,n\}.$$

证: 由定理 9.1. $\exists!$ 基底

$e_1^{**},\cdots,e_n^{**}$ 使得

$$e_j^{**}(e_i^*)=\delta_{ij}.$$

由定理 9.3. $\forall j\in\{1,\cdots n\}$. $\exists!$ $\vec{e}_j\in V$

使得 $e_j^{**}=\varepsilon_{\vec{e}_j}$

$$e_j^{**}(e_i^*)=\varepsilon_{\vec{e}_j}(e_i^*)=e_i^*(\vec{e}_j)=\delta_{ij}$$

$\because\varphi$ 是线性同构 $\therefore\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 线性无关

于是 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 $V$ 的基 $\square$

推论 9.4. 设 $f_1,\cdots f_k\in V^*$, $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 是 $V$ 的基. 则

$$\dim\langle f_1,\cdots,f_k\rangle=\operatorname{rank}\left(f_j(\vec{e}_i)\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots k}}$$

证: $\because\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 是 $V$ 的基.

$\therefore\varepsilon_{\vec{e}_1},\cdots\varepsilon_{\vec{e}_n}$ 是 $V^{**}$ 的基

由定理 9.2

$$\dim\langle f_1,\cdots f_k\rangle=\operatorname{rank}\left(\varepsilon_{\vec{e}_i}(f_j)\right)_{n\times k}$$

$$=\operatorname{rank}\left(f_j(\vec{e}_i)\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots k}}\quad\square$$

## §9.4 子空间的对偶

定义: 设 $U\subset V$ 是子空间. 令

$$U^\circ=\{f\in V^*\mid\forall\vec{u}\in U,\ f(\vec{u})=0\}$$

称 $U^\circ$ 是 $U$ 的零化(子空间)

$U^\circ$ 是 $V^*$ 的子空间.

验证: $\forall\alpha,\beta\in F$, $f,g\in U^\circ$. $\forall\vec{u}\in U$

$$(\alpha f+\beta g)(\vec{u})=\alpha f(\vec{u})+\beta g(\vec{u})=0\quad\square$$

例 设 $V=F^3$, $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $U=\langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\rangle$

计算 $U^\circ$ 的一组基.

解 设 $f=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3\in\cancel{U^\circ}$

则 $f\in U^\circ\Leftrightarrow f(\vec{\alpha}_1)=f(\vec{\alpha}_2)=0$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=t\\ \alpha_2=-t\\ \alpha_3=-t\end{cases}\quad t\in F$$

于是 $U^\circ = \langle X_1 - X_2 - X_3 \rangle$

定义：设 $W \subset V^*$ 是子空间，定义

$$W^\circ = \{\vec{v} \in V \mid \forall f \in W,\ f(\vec{v}) = 0\}$$

称 $W^\circ$ 是 $W$ 的零化空间（零化子）

验证：$W^\circ$ 是 $V$ 中子空间

设 $\alpha, \beta \in F$，$\vec{u}, \vec{v} \in V$，$f \in W$

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W^\circ$$

（注 需要 $f$ 是线性函数）

例：$W = \langle X_1 - X_2 - X_3 \rangle \in (F^3)^*$，求 $W^\circ$ 的一组基

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F^3$，则

$$\vec{x} \in W^\circ \Longleftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

例 $\{\vec{0}\}^\circ = V^*$（显然），$\{0^*\}^\circ = V$（显然）

$V^\circ = \{0^*\}$ （？），$(V^*)^\circ = \{\vec{0}\}$（引理9.1）

例. 设 $U_1 \subset U_2 \subset V$ 是子空间

$W_1 \subset W_2 \subset V^*$ 是子空间

则 $U_1^\circ \supset U_2^\circ$ 且 $W_1^\circ \supset W_2^\circ$ （inclusion-reversing）

证：$f \in U_2^\circ \Rightarrow \forall \vec{v} \in U_2,\ f(\vec{v}) = 0$

$\because U_1 \subset U_2$ $\therefore$ $\forall \vec{v} \in U_1,\ f(\vec{v}) = 0$

$\Rightarrow f \in U_1^\circ \Rightarrow U_2^\circ \subset U_1^\circ$

同理 $W_1^\circ \supset W_2^\circ$

定理 9.4：(i) 设 $U$ 是 $V$ 的子空间，则

$$\dim U + \dim U^\circ = \dim V$$

(ii) 设 $W$ 是 $V^*$ 的子空间，则

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V$$

证 (ii)　(i) 类似

设 $e_1^*, \dots, e_d^*$ 是 $W$ 的一组基，把它扩充为 $V^*$ 的一组基 $e_1^*, \dots, e_d^*, e_{d+1}^*, \dots, e_n^*$

由推论9.3 $\exists$ $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$ 是基底且

$$e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{ij},\quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

于是 $\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n \in W^\circ$

[$\because$ $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, $j \in \{d+1, \dots, n\}$, $e_i^*(\vec{e}_j) = 0$]

设 $\vec{w} \in W^0$ 则 $\exists\ \beta_1, \dots \beta_n \in F$ 使得

$$\vec{w} = \beta_1 \vec{e_1} + \cdots + \beta_d \vec{e_d} + \beta_{d+1} \vec{e_{d+1}} + \cdots + \beta_n \vec{e_n}$$

设 $i \in \{1, \dots d\}$

$$0 = e_i^*(\vec{w}) = \beta_i \Rightarrow \vec{w} \in \langle \vec{e_{d+1}}, \dots \vec{e_n} \rangle$$

$$\Rightarrow W^0 = \langle \vec{e_{d+1}}, \dots \vec{e_n} \rangle \Rightarrow \dim W^0 = n-d$$

$\boxtimes$

定理9.5 (i) 设 $U \subset V$ 是子空间

则 $(U^0)^0 = U$

(ii) 设 $W \subset V^*$ 是子空间. 则

$$(W^0)^0 = W$$

证: (i) $\forall \vec{u} \in U.\ \forall f \in U^0.\ f(\vec{u}) = 0$

$$\Rightarrow U \subset (U^0)^0$$

由定理9.4 $\dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim U^0 + \dim (U^0)^0$

$$\Rightarrow \dim U = \dim (U^0)^0$$

$$\Rightarrow U = (U^0)^0$$

(ii) 类似.

例: $V = \mathbb{R}[x]$ $h(x) = x^2$ $U = \langle x^2 \rangle$

$$S = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall p \in U.\ p(\alpha) = 0 \}$$

$$\Rightarrow S = \{0\}$$

设 $T = \{ g \in V \mid g(0) = 0 \}$

$= \langle x \rangle$. $T \neq U$:

~~命题定理~~ 9.6. (i) 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间

则 $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$

$(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$

~~命题例~~ (ii) 设 $W_1, W_2 \subset V^*$ 是子空间

$(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

$(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

命题9.2 (i) 设 $V = U_1 \oplus U_2$ 是直和分解

则 $V^* = U_1^0 \oplus U_2^0$

(ii) 设 $V^* = W_1 \oplus W_2$ 是直和分解

则 $V = W_1^0 \oplus W_2^0$.

(证明略. 见前几章的讲义)

例 ① 设 $M_{ij}\in M_n(F)$ 其中 $i$ 行 $j$ 列处元素是 1 其它元素是零. $i,j\in\{1,\dots,n\}$ 设 $A\in M_n(F)$

$A=(a_{ij})_{n\times n}$

则 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M_{ij}$

问题1: $\{M_{ij}\mid i,j\in\{1,\dots,n\}\}$ 的对偶基是什么?

② $$M_{ij}A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0_{1\times n}\\ \vdots\\ 0_{1\times n}\\ \vec{A_j}\\ 0_{1\times n}\\ \vdots\\ 0_{1\times n}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ --i\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$AM_{ij}=\begin{array}{c}(\vec{0},\dots\vec{0}\ \ \vec{A}^{(i)},\vec{0},\dots\vec{0})\\ \qquad\quad\ \ \vdots\\ \qquad\quad\ \ j\end{array}$$

自己验证

③ $tr(M_{ij}A)=a_{ij}$. $\quad tr(AM_{ij})=a_{ji}$.

由②直接可得

④ 设 $U=\{B\in M_n(F)\mid tr(B)=0\}$ 则 $U$ 是 $M_n(F)$ 的 $n^2-1$ 维子空间

(已证)

⑤ 设 $A\in M_n(F)$ 使得

$\forall B\in U\quad AB\in U$

证明: $A=\lambda E$. 其中 $\lambda\in F$

证(法1).

$$f_A:\ \begin{array}{ccc}M_n(F)&\longrightarrow&F\\ X&\longmapsto&tr(AX)\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} M_n(F) \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "f_A"'] & M_n(F) \arrow[d, "tr"] \\ & F \end{tikzcd}\qquad X\longmapsto AX$$

$\Rightarrow f_A\in M_n(F)^*$

$\forall B\in U,$

$f_A(B)=tr(AB)=0$. 于是 $f_A\in U^0$

$\dim U^0=1$. 而 $f_E\in U^0$

由定理9.4和④

且 $f_E\neq 0^*$ 于是 $\exists\lambda\in F$ 使得

$$f_A=\lambda f_E$$

$$f_A(M_{ij})=tr(AM_{ij})=a_{ji}$$

$$\lambda f_E(M_{ij})=\lambda tr(M_{ij})=\lambda\delta_{ij}\qquad i,j\in\{1,\dots,n\}$$

$\Rightarrow\quad a_{ji}=\lambda\delta_{ij}$

$\Rightarrow\quad A=\lambda E\quad\square$

法2 设 $X=(x_{ij})_{n\times n}\in M_n(F)$

则 $X\in U \Leftrightarrow x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$ 的解空间

即 $U$ 是 $x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

则 $AX=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}\right)_{\substack{i=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}$

$$tr(AX)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{ki}$$

$tr(AX)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{ki}=0$

设 $A$ 满足 $\forall X\in U$ $tr(AX)=0$

于是方程组 $\begin{cases} x_{11}+\cdots+x_{nn}=0 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{ki}=0\end{cases}$

其解空间为 $U$ 且 $\dim U=n^2-1$

于是该方程组系数矩阵 $C$ 的秩为1

从而 ~~$\exists \vec{C_2}=$~~ $\vec{C_2}=\lambda\vec{C_1}$ $(\because \vec{C_1}\neq 0)$

$\exists\lambda\in F$ 使得

$\Rightarrow a_{ij}=0$ $i\neq j$, $a_{ii}=\lambda$, $i=1\cdots n$

即 $A=\lambda E$



例 函数的微分

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\vec{x_0}\in\mathbb{R}^n$ $f$ 在 $\vec{x_0}$ 点可微

如果 $\exists L\in(\mathbb{R}^n)^*$ 使得

(*) $\lim_{|\vec v|\to 0}\frac{f(\vec{x_0}+\vec v)-f(\vec{x_0})-L(\vec v)}{|\vec v|}=0$

如果(*)成立. ~~因~~ 且 $\vec w\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec 0\}$, $|\vec w|=1$

$f$ 沿 $\vec w$ 的方向导数是 $L(\vec w)$.

验证: $\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x_0}+t\vec w)-f(\vec{x_0})-L(t\vec w)}{t}=0$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x_0}+t\vec w)-f(\vec{x_0})}{t}=L(\vec w)$.

设 $L$ 在 ~~$\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$~~ 标准基 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 的对偶基 $e_1^*,\dots,e_n^*$ 下的坐标是 ~~$(a_1,\dots,a_n)$~~. $L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})e_i^*$

称为 $f$ 在 $\vec{x_0}$ 处微分

例 齐次线性方程