§10 双线性型 (bilinear forms)

§10.1 什么是双线性函数

回忆：线性函数。给定 $\alpha_1, \dots \alpha_n \in F$

$$f: F^n \longrightarrow F$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

抽象：设 V 是 F 上的 n 维线性空间

$f: V \longrightarrow F$ 是线性函数

如果 $\forall \alpha, \beta \in F$，$\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

对偶. $f \in V^*$

双线性函数　　给定 $\alpha_{ij} \in F$，$i, j \in \{1, \dots n\}$

$$f: F^n \times F^n \longrightarrow F$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$$

令 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其中 $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\cdots n \\ j=1\cdots n}} \in M_n(F)$

(通过矩阵乘法可直接验证!)

当 $\vec{y}$ 取 F^n 中某个向量 $\vec{v}$，让 $\vec{x}$ 变化时，

$f(\vec{x}, \vec{v})$ 是关于 $\vec{x}$ 的线性函数

同样 $f(\vec{v}, \vec{y})$ 是关于 $\vec{y}$ 的线性函数

设 $g(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$

是从 V 到 F 的齐二次函数. 它不是线性的

例：$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto xy$

是双线性的. 设 $g(x) = f(x, x)$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$　　不是线性的

本章余下的内容

双线性函数 $\longrightarrow$ 二次函数

核心工具　矩阵的合同.

§10.2 双线性型的定义和性质

设 V 是 F 上的线性空间

定义：$f: V\times V \longrightarrow F$ 称为 V 上的双线性型，如果 $\forall \alpha,\beta\in F$，$\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y}) \quad 和$$

$$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z}).$$

例：~~(i) 证明~~ 设 f 是 V 上的双线性型

(i) 证明：$\forall \vec{x}\in V$，$f(\vec{0},\vec{x})=f(\vec{x},\vec{0})=0$

(ii) 设 $\alpha,\beta\in F$，$\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y}\in V$

展开 $f(\alpha\vec{x},\beta\vec{y})$ 和 $f(\vec{u}+\vec{v},\vec{x}+\vec{y})$

解：(i) $f(\vec{0},\vec{x})=f(\vec{0}+\vec{0},\vec{x})=f(\vec{0},\vec{x})+f(\vec{0},\vec{x})$

$\Longrightarrow f(\vec{0},\vec{x})=0$

同理 $f(\vec{x},\vec{0})=0$

(ii) $f(\alpha\vec{x},\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\beta\vec{y})=\alpha\beta f(\vec{x},\vec{y})$

$$f(\vec{u}+\vec{v},\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{u},\vec{x}+\vec{y})+f(\vec{v},\vec{x}+\vec{y})$$

$$=f(\vec{u},\vec{x})+f(\vec{u},\vec{y})+f(\vec{v},\vec{x})+f(\vec{v},\vec{y}).$$

例 设 $l_1,l_2\in V^*$，则

$f(\vec{x},\vec{y})=l_1(\vec{x})\,l_2(\vec{y})$ 是双线性型

任取 $\vec{v}\in V$ $\quad l_1(\vec{v})\in F$ $\quad f(\vec{v},\vec{y})=l_1(\vec{v})\,l_2(\vec{y})$

关于 $\vec{y}$ 是线性的。同理，当 $\vec{y}$ 取 V 的任一固定

时 f 关于 $\vec{x}$ 也是线性的

§10.3 双线性型的矩阵表示

设 V 是有限维线性空间，$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基，f 是 V 上双线性型。

令 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$，$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\dots+y_n\vec{e}_n$

$$f(\vec{x},\vec{y})=f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i,\ \vec{y}\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i f(\vec{e}_i,\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i f\Big(\vec{e}_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{e}_j\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}y_j f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\,x_i y_j$$

令 $A=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{\substack{i=1,\cdots n\\ j=1,\cdots,n}}$

(可直接验证!)

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

称 A ~~关于~~ 是 f 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵

<u>注 1</u> 设 $B\in M_n(F)$,使得 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1\cdots x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则 $f(\vec{e_i},\vec{e_j})=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0\cdots 0)B\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-j=b_{ij}$

$\Rightarrow\quad B=A.$

<u>注 2</u> 设 $A\in M_n(F)$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in F^n$

定义: $f:\quad F^n\times F^n\longrightarrow F$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\longmapsto(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则 f ~~是~~ 是 F^n 上双线性型. 其在标准基 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵是 A

例: 设 F^3 中 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ 双线性型

$$f(\vec{x},\vec{y})=x_1y_2-x_2y_3$$

求 f 在标准基下的矩阵 A

解: $$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 0&0&-1\\ 0&0&0\end{pmatrix}$$

~~§10.4 矩阵的合同~~

定理10.1. 设 V 是 F 上有限维线性空间, f 是 V 上双线性型. f 在基底 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵为 A, 在基底 $\vec{\varepsilon_1}\cdots\vec{\varepsilon_n}$ 下的矩阵为 B. 设 C 是从 $\vec{e_1},\cdots\vec{e_n}$ 到 $\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_n}$ 的转换矩阵. 则

$$B=C^tAC.$$

特别地 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A)$.

证: 设 $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}=x_1'\vec{\varepsilon_1}+\cdots+x_n'\vec{e_n}$

$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}=y_1'\vec{\varepsilon_1}+\cdots+y_n'\vec{e_n}$

则 ~~$f(\vec{x},\vec{y})=$~~ 由推论7.1

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_n'\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1',\cdots x_n') C^t A C \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

于是 $B = C^t A C$

$\because$ C 可逆 $\therefore$ $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$. $\square$

定义：设 f 是 V 上的双线性型，矩阵 A 是 f 在 V 下某组基的矩阵。则 A 的秩也称为 f 的秩 记为 $\mathrm{rank}(f)$。

如果 $\mathrm{rank}(f) = \dim V$，则称 f 是非退化的。

例：(1) 设 f 是 V 上双线性型

(i) $\mathrm{rank}(f) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x},\vec{y} \in V.\ f(\vec{x},\vec{y}) = 0$

(ii) $\mathrm{rank}(f) = 1 \Leftrightarrow \exists\, l_1, l_2 \in V^* \setminus \{0^*\}$

使得 $f(\vec{x},\vec{y}) = l_1(\vec{x})\, l_2(\vec{y})$

证明：设 V 的一组基是 $\vec{e}_1,\cdots \vec{e}_n$. f 在该基下的矩阵是 A.

$\vec{x},\vec{y} \in V$ 且 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$

(i) $\mathrm{rank}(f) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = 0$

$\Leftrightarrow A = O_{n\times n}$

$\Leftrightarrow f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \cdots x_n)\, O_{n\times n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$

(ii) "$\Rightarrow$" $\mathrm{rank}(f) = 1 \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = 1$

$$\Rightarrow A = \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \cdots \lambda_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$$

其中 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 不全为零

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \cdots x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n)$$

令：$l_1 : V \to F$, $\vec{x} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.

$l_2 : V \to F$, $\vec{y} \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$

$f(\vec{x},\vec{y}) = l_1(\vec{x})\, l_2(\vec{y})$

"$\Leftarrow$" $l_1 : V \to F$, $\vec{x} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, $l_2 : V \to F$, $\vec{y} \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$

$\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 不全为零 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ 不全为零

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1 \cdots \lambda_n)}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

~~故~~ $A=\left(\lambda_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\cdots\lambda_n\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)$

$\because$ $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 不全为零 $\therefore$ $\operatorname{rank}(A)=1$

§10.4 矩阵的合同

定义：设 $A,B\in M_n(F)$. 如果存在 $C\in GL_n(F)$ 使得 $B=C^tAC$，则称 B 与 A 合同（congruent）. 记为 $B\sim_c A$.

验证：$\sim_c$ 是等价关系.

$\forall A\in M_n(F)$　$A=EAE=E^tAE\Rightarrow A\sim_c A$

设 $B\sim_c A$. 则 $\exists C\in GL_n(F)$，使得 $B=C^tAC$. 于是 $(C^t)^{-1}BC^{-1}=A$

$\because (C^t)^{-1}=(C^{-1})^t$ $\therefore$ $A=(C^{-1})^tBC$

$\Rightarrow A\sim_c B$　（对称）

设 $A_1,A_2,A_3\in M_n(F)$，$A_1\sim_c A_2$，$A_2\sim_c A_3$

则 $\exists C_1,C_2\in GL_n(F)$，使得

$A_1=C_1^tA_2C_1$，　$A_2=C_2^tA_3C_2$

则　$A_1=C_1^tC_2^tA_3C_2C_1$

$=(C_2C_1)^tA_3C_2C_1\Rightarrow A_1\sim_c A_3$ ▢

定理10.2　设 f 是 V 上双线性型. A 是 f 在 V 的基底 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 下的矩阵.

设 $B\sim_c A$. 则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 使得 f 在该基下的矩阵为 B

证：$\because B\sim_c A$ $\therefore$ $\exists C\in GL_n(F)$ 使得 $B=C^tAC$. 令

$(\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)C$

因为 C 可逆. 所以 $\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的基（定理7.1）

由定理10.1　f 在 $\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 下矩阵是 B ▢

注：把双线性型 f 化为"标准型"

$\Updownarrow$

在与 A 合同的矩阵中找出尽可能简单的矩阵（0尽可能多，非零元出现尽可能有规律）

§10.5 对称与斜对称双线性型

定义：设 f 是 V 上的双线性型，~~如果~~ $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

如果 $f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$，则称 f 是对称的；

…… $f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$，则称 f 是斜对称的。

记号 V 上所有双线性型的集合记为 $\mathcal{L}_2(V,F)$

对称 ——— 记为 $\mathcal{L}_2^+(V,F)$

斜对称 ——— $\mathcal{L}_2^-(V,F)$

命题 10.1 ~~$\mathcal{L}_2(V,F)$ 上的~~

$\mathcal{L}_2(V,F)$ 是 F 上的线性空间，$\mathcal{L}_2^+(V,F)$，$\mathcal{L}_2^-(V,F)$ 是它的子空间。当 $char(F)\neq 2$ 时

$$\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)\oplus\mathcal{L}_2^-(V,F).$$

证：因为 $\mathcal{L}(V,F)\subset Func(V\times V,F)$

所以只要证明 $\mathcal{L}(V,F)$ 对线性运算封闭即可。设 $\alpha,\beta\in F$，$f,g\in\mathcal{L}_2(V,F)$

$$h=\alpha f+\beta g$$

$\forall \vec{x},\vec{y}\in V$．固定 ~~$\vec{x}$~~ $\vec{x}_0$ $h(\vec{x}_0,\vec{y})$

$$=\alpha f(\vec{x}_0,\vec{y})+\beta g(\vec{x}_0,\vec{y})$$

$\because f(\vec{x}_0,\vec{y})$ $g(\vec{x}_0,\vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 是线性函数

$\therefore h(\vec{x}_0,\vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 也是。

同理 $h(\vec{x},\vec{y})$ 关于 $\vec{x}$ 也是．$h\in\mathcal{L}_2(V,F)$．

设 $f,g\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$

则
$$h(\vec{y},\vec{x})=\alpha f(\vec{y},\vec{x})+\beta g(\vec{y},\vec{x})$$
$$=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta g(\vec{x},\vec{y})=h(\vec{x},\vec{y})$$

由此可知 $h\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$

$\mathcal{L}_2^+(V,F)$ 是子空间

同理 $\mathcal{L}_2^-(V,F)$ 是子空间

设 ~~$f\in\mathcal{L}_2(V,F)$~~ $char(F)\neq 2$，$f\in\mathcal{L}_2(V,F)$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})\right)}_{\in\,\mathcal{L}_2^+(V,F)}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f(\vec{x},\vec{y})-f(\vec{y},\vec{x})\right)}_{\in\,\mathcal{L}_2^-(V,F)}$$

于是 $\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)+\mathcal{L}_2^-(V,F)$．

设 $g\in\mathcal{L}_2^+(V,F)\cap\mathcal{L}_2^-(V,F)$

则 $g(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{y},\vec{x})$ 且 $g(\vec{x},\vec{y})=-g(\vec{y},\vec{x})$

$$\Rightarrow 2g(\vec{x},\vec{y})=0\Rightarrow g(\vec{x},\vec{y})=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)\oplus\mathcal{L}_2^-(V,F)\ \square$$

命题10.2 设 V 是有限维线性空间 $f\in\mathcal{L}_2(V,F)$. A 是 f 在基底 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵

(i) $f\in\mathcal{L}_2^+(V,F)\Leftrightarrow A$ 对称

(ii) $f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)\Leftrightarrow A$ 斜对称

证: (i) $f\in\mathcal{L}_2^+(V,F)\Rightarrow\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$

$$f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=f(\vec{e}_j,\vec{e}_i)$$

由 A 的定义可知, A 对称

(⇐) 设 A 对称. $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$

$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n$. 则

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=\left((x_1,\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)^t=(y_1,\cdots y_n)A^t\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(y_1,\cdots y_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=f(\vec{y},\vec{x})$$

(ii) 类似 ☒

约定. 从此到本章结束. V 是 F 上有~~维~~限维线性空间. 且 $\mathrm{char}(F)\neq 2$.

§11 对称双线性型的规范基

引理11.1 (对称双线性型的极化公式)

设 $f\in\mathcal{L}_2(V,F)$. 则 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-f(\vec{x},\vec{x})-f(\vec{y},\vec{y})\right)$$

特别地, 如果 f 不是零映射. 则 $\exists\vec{v}\in V$ 使得 $f(\vec{v},\vec{v})\neq 0$.

证: $\frac{1}{2}\left(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-f(\vec{x},\vec{x})-f(\vec{y},\vec{y})\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x},\vec{x}+\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-f(\vec{x},\vec{x})-f(\vec{y},\vec{y})\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x},\vec{x})+f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})+f(\vec{y},\vec{y})-f(\vec{x},\vec{x})-f(\vec{y},\vec{y})\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})\right)$$

$$=f(\vec{x},\vec{y})\qquad(\because f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x}))$$

由极化公式~~两~~右侧可知 当 $f\neq 0$ 时. $\exists\vec{v}\in V$. 使得

$$f(\vec{v},\vec{v})\neq 0\quad ☒$$

定理11.1 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$，则存在 V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 使得 f 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

，其中 $r=\operatorname{rank}(f)$

证：如果 $r=0$，则定理成立，设 $r>0$

我们对 $\dim V$ 归纳。

当 $\dim V=1$ 时，定理成立

设 $\dim V=n-1$ 时 定理成立，再设 $\dim V=n$

因为 $r>0$，所以 $f\neq 0$，由引理11.1

$\exists\, \vec{e_1}\in V$，使得 $f(\vec{e_1},\vec{e_1})\neq 0$。

令 $U=\{\vec{u}\in V \mid f(\vec{u},\vec{e_1})=0\}$。

~~考虑线性函数~~

$$\varphi:\ V\longrightarrow F,\quad \vec{v}\longmapsto f(\vec{v},\vec{e_1})$$ 则 $U=\ker(\varphi)$

$\because\ \varphi(\vec{e_1})=f(\vec{e_1},\vec{e_1})\neq 0 \quad \therefore\ \varphi\neq 0$

于是 $\dim U=n-1$

设 $\vec{v}\in\langle\vec{e_1}\rangle\cap U$，则 $\vec{v}=\alpha\vec{e_1}$，$\alpha\in F$

$0=\varphi(\vec{v})=f(\alpha\vec{e_1},\vec{e_1})=\alpha f(\vec{e_1},\vec{e_1})\Rightarrow \alpha=0$

$\Rightarrow\ \langle\vec{e_1}\rangle\cap U=\{\vec{0}\}$

于是 $V=\langle\vec{e_1}\rangle\oplus U$ $\quad(*)$

设 $g=f|_{U\times U}$ 即 $g:\ U\times U\longrightarrow F,\ (\vec{x},\vec{y})\longmapsto f(\vec{x},\vec{y})$

则 $g\in\mathcal{L}_2^+(U,F)$。

由归纳假设 存在 U 中的一组基 $\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$

使得 g 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix}$

其中 $s=\operatorname{rank}(g)+1$ 特别地

$\forall\, i,j\in\{2,\cdots,n\}$，$i\neq j$，$g(\vec{e_i},\vec{e_j})=0=f(\vec{e_i},\vec{e_j})$

$\because\ \vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}\in U \quad \therefore\ f(\vec{e_i},\vec{e_1})=0$，$i=2,\cdots,n$

又因为 f 对称，$f(\vec{e_1},\vec{e_i})=0$，$i=2,\cdots,n$

令 $\lambda_1=f(\vec{e_1},\vec{e_1})$，则 f 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_s & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix}$$

且 $r=s$。 $\square$

注：由 $(*)$，$\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的基底 $\square$

~~证~~/~~设~~ 推论11.1 设 $A\in M_n(F)$ 对称

则 $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_r\in F\setminus\{0\}$ 使得

$$A\sim_c \mathrm{diag}_n(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0\cdots0).$$

证：设 F^n 的标准基为 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$

定义：$f: F^n\times F^n\longrightarrow F$

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\longmapsto(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

即 A 在 f 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵

$\because$ A 对称 $\therefore$ f 对称（命题10.2）

由定理11.1 $\exists$ V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 使得

在该基下 f 的矩阵是 $\mathrm{diag}_n(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0\cdots0)$,

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$. 由定理10.1

$$A\sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0\cdots0)\ \square$$

定义：设 $f\in\mathcal{L}_2(V,F)$. 如果 f 在

V 的某组基下的矩阵是对角矩阵

则该基称为 f 的一组规范基

例：设 $\mathbb{R}^3$ 中. 对称双线性型 f 在

标准基 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}$$

求 f 在的规范基和在该基下的矩阵

解：① 求 $\vec{v}$ 使得 $f(\vec{v},\vec{v})\neq0$. 由 A 的定义

可取 $\vec{v}=\vec{e_1}$

② 令 $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\vec{x}\mapsto f(\vec{x},\vec{e_1})$ 求 $\ker(\varphi)$ 的一组基

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\varphi(\vec{x})=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=x_1+x_2-2x_3$$

$$\ker(\varphi)=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{\varepsilon_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{\varepsilon_3}}\rangle$$

③ 求 $f|_{U\times U}$ 在 $\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}$ 下的矩阵，其中

$U=\ker(\varphi)$. 设 $g=f|_{U\times U}$ 则 g

在 $\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}$ 下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix}g(\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_2}), & g(\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})\\ g(\vec{\varepsilon_3},\vec{\varepsilon_2}), & g(\vec{\varepsilon_3},\vec{\varepsilon_2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_2}), & f(\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})\\ f(\vec{\varepsilon_3},\vec{\varepsilon_2}), & f(\vec{\varepsilon_3},\vec{\varepsilon_2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\-2&8\end{pmatrix}$$

降维重复

① 求 $\vec{u}\in U$ 使得 $g(\vec{u},\vec{u})\neq 0$. 由 B 的定义可取 $\vec{u}=\vec{\varepsilon}_2$

② 设 $\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}$ 确定
$\vec{x} \longmapsto g(\vec{x},\vec{\varepsilon}_2)$

$\ker(\psi)$. 设 $\vec{z}=z_1\vec{\varepsilon}_2+z_2\vec{\varepsilon}_3$

$$\psi(\vec{z},\vec{\varepsilon}_2)=(z_1,z_2)B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=4z_1-2z_2$$

$$\ker(\psi)=\langle \vec{\varepsilon}_2+2\vec{\varepsilon}_3\rangle$$

$$\vec{\varepsilon}_2+2\vec{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

设 $\vec{w}_1=\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2=\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}_3=\vec{\varepsilon}_2+2\vec{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$

则 $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ 是 f 的规范基

$$(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&5\\0&-1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}}_{C}$$

f 在 $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3$ 下的矩阵

$$C^tAC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-36\end{pmatrix}$$

注: 设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$,
$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3$

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1+5x_2y_2-4x_2y_2$$

设 $\vec{x}=x_1'\vec{w}_1+x_2'\vec{w}_2+x_3'\vec{w}_3$
$\vec{y}=y_1'\vec{w}_1+y_2'\vec{w}_2+y_3'\vec{w}_3$

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1',x_2',x_3')\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}$$

$$=x_1'y_1'+4x_2'y_2'-36x_3'y_3'$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&5\\0&-1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}$$

令 $\vec{t}_1=\vec{w}_1$, $\vec{t}_2=\frac{1}{2}\vec{w}_2$, $\vec{t}_3=\frac{1}{6}\vec{w}_3$

$f(\vec{t}_1,\vec{t}_1)=1$. $f(\vec{t}_2,\vec{t}_2)=f(\frac{1}{2}\vec{w}_2,\frac{1}{2}\vec{w}_2)$
$=\frac{1}{4}f(\vec{w}_2,\vec{w}_2)=1$. $f(\vec{t}_3,\vec{t}_3)=\frac{1}{36}f(\vec{w}_3,\vec{w}_3)=-1$

在 $\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3$ 下 f 的矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

§12 二次型 §12.1 二次型的定义和性质

定义：$q: V \longrightarrow F$ 称为二次型，如果

存在 $f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$ 使得

$\forall \vec{x} \in V, \quad q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$

（由柯斯特里金 p31 定理3 可知，

上述定义与 p31 的定义等价）.

注1 称 f 为 q 的一个配极双线性型

命题12.1 设 q 是 V 上的二次型，则 q

的配极双线性型唯一.

证：设 $f, g \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$ 使得

$q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}), \quad q(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x})$

则 $\forall \vec{x} \in V, \quad f(\vec{x}, \vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x})$

由极化公式（引理8.1）可知

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y})$ ▨

例：设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$，$\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 是 V 的

基. $A \in M_n(F)$ 是 f 在 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 下的矩阵

则 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 对称.

令 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$

$$f(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j$$

令 $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$

$$q: V \longrightarrow F$$

$$\vec{x} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j$$

每个二次型是一个二~~项~~次函数

例：$q: F^n \longrightarrow F$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_{ij}x_ix_j$$

令 $\beta_{ii}=\alpha_i,\quad i=1,2,\dots n$

$\beta_{ij}=\beta_{ji}=\frac{\alpha_{ij}}{2}\qquad 1\le i<j\le n$

$$q(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(\beta_{ij}+\beta_{ji})x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j$$

$$=(x_1,\cdots x_n)\,B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

其中 $B=(\beta_{ij})_{n\times n}$. $\beta_{ij}=\beta_{ji}$

$\because$ B 对称 $\therefore$

$f: F^n\times F^n\longrightarrow F$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\mapsto (x_1,\cdots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

是 双对称双线性型 且 $q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$ 是 二次型.

定义：设 $q: V\to F$ 是二次型，$f\in \mathcal{L}_2^+(V,F)$ 是 q 的配极. 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的基

A 是 f 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵. 称

A 是 q 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵；$\mathrm{rank}(q):=\mathrm{rank}(f)$

注：q 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是对称的

例：$q: F^3\longrightarrow F$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto x_1^2+x_1x_2-3x_2x_3$$

求 q 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 下的矩阵

$$x_1^2+x_1x_2-3x_2x_3=x_1^2+\frac12x_1x_2+\frac12x_2x_1-\frac32x_2x_3-\frac32x_3x_2$$

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\ \frac12&0&-\frac32\\ 0&-\frac32&0\end{pmatrix}$$

例：$q(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n$

求 A 在 F^n 的标准基下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&\frac12&0&\cdots&0\\ \frac12&0&\frac12&&\\ &\frac12&0&\ddots&\\ &&\ddots&\ddots&\frac12\\ 0&&&\frac12&0\end{pmatrix}.$$

定义：设 $q: V \to F$ 是二次型，$f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$ 是 q 的配极，f 的规范基也称为 q 的规范基

定理12.1. 设 q 是 V 上二次型，$\mathrm{rank}(q) = r$

$\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n$ 是 q 的规范基，则

$\exists \lambda_1, \dots \lambda_r \in F \setminus \{0\}$ 使得

$\forall \vec{x} = x_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n \vec{\varepsilon}_n \in V$，$q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$

证：设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$ 是 q 的配极

则在 $\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n$ 下，

$f(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_r x_r y_r$

其中 $\lambda_1, \dots \lambda_r \in F \setminus \{0\}$. $\vec{x} = x_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n \vec{\varepsilon}_n$

$\vec{y} = y_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + y_n \vec{\varepsilon}_n$ [定理11.1]

$q(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$.