回忆：定理12.1 设 q 是 V 上的二次型，$\operatorname{rank}(q)=r$. 则存在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 使得 $\forall \vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\vec{\varepsilon}_n\in V$

$$q(\vec{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2 \qquad (*)$$

其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_r\in F\setminus\{0\}$ 与 $\vec{x}$ 无关

证：~~[illegible]~~. 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$ 是 q 的配极且 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 f 的规范基

由（见定理11.1）

设 $\vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\vec{\varepsilon}_n$, $\vec{y}=y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_n\vec{\varepsilon}_n$

则 $f(\vec{x},\vec{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_rx_ry_r$

于是 $q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$ ∎

注：$(*)$ 称为 q 的一个规范型

问题：给定二次型，求它的规范基和规范型.

方法1 ① 写出二次型的矩阵
② 写出二次型的配极
③ 利用上周讲的降维法

方法2 配方法

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$q(\vec{x})=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$. 求 q 的规范型和一组规范基

注：此时 $q:\ \begin{array}{l}F^3\longrightarrow F\\ \vec{x}\longmapsto q(\vec{x})\end{array}$

线性变量替换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}\qquad \text{令 } \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\qquad \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{C_1}\vec{y}$$

（注 C_1 可逆）

$q(\vec{x})=q(C_1\vec{y})=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

~~线性变量替换~~ 配方

$$q(C_1\vec{y}) = 2(y_1^2-2y_1y_3) - 2(y_2^2-4y_2y_3)$$

$$= 2(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2) - 2(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2) - 2y_3^2 + 8y_3^2$$

$$= 2(y_1-y_3)^2 - 2(y_2-2y_3)^2 + 6y_3^2$$

线性变量替换

$z_1 = y_1 - y_3$

$z_2 = y_2 - 2y_3$

$z_3 = y_3$

令 $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$　$\vec{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_2}\vec{y}$

$$\vec{y} = C_2^{-1}\vec{z}$$

$$q(C_1C_2^{-1}\vec{z}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

坐标变换为

$$\vec{x} = C_1C_2^{-1}\vec{z}$$

老　　新

$\Rightarrow$ ~~$(\vec\varepsilon_1,\vec\varepsilon_2,\vec\varepsilon_3)=\vec{e}\,C_1C_2^{-1}$~~

$$(\vec\varepsilon_1,\vec\varepsilon_2,\vec\varepsilon_3) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)(C_1C_2^{-1})$$

$$C_1C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$(\vec\varepsilon_1,\vec\varepsilon_2,\vec\varepsilon_3) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)C = C$$

规范型为：$q(\vec{z}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$

~~(c)~~

验证 $q(\vec{x})$ ~~的~~ 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^tAC = \begin{pmatrix} 2 & & O \\ & -2 & \\ O & & 6 \end{pmatrix}$$

~~§12.2 复二次型的规范型~~

~~定理12.2 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，q 是 V 上的二次型，则有规范基 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$，$q$ 的规范型可写为~~

~~$q(\vec{x}) = x_1'^2 + \cdots + x_r'^2$~~

~~其中 $\vec{x} = x_1'\vec{v}_1 + \cdots + x_n'\vec{v}_n$~~

§13 应用：齐二次多项式因式分解

问题：给 $P \in F[x_1, \dots, x_n]$ 齐二次

问：P 能否写成两个齐一次多项式之积

注 如果齐二次的多项式可以写成两个一次多项式之积，这两个多项式一定是齐次的 （自己验证）

~~命题~~ 引 13.1 设 $F[x_1, \dots x_n]$ 和 $F[y_1, \dots y_n]$ 是两个多项式环。$C \in GL_n(F)$，令 $C = (c_{ij})_{n\times n}$. 则 环同态

$$\varphi_C : F[x_1, \dots x_n] \longrightarrow F[y_1, \dots y_n]$$

$$\varphi_C|_F = id. \quad \varphi_C(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j, \quad i = 1 \dots n$$

是同构

证：由第零章定理3.2. φ_C 是同态

要证 φ_C 是同构，只要证明 φ_C 的逆存在

设 $C^{-1} = D = (d_{ij})_{n\times n}$

$$\psi_D : F[y_1 \dots y_n] \to F[x_1, \dots x_n]$$

满足 $\psi_D|_F = id \qquad \psi_D(y_j) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j$

则由第零章定理3.2，ψ_D 是环同态

$\forall a \in F$

$$\varphi_C \circ \psi_D(a) = a.$$

$\forall i \in \{1, \dots n\}$

$$\varphi_C \circ \psi_D(y_i) = \varphi_C\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, \varphi_C(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} c_{jk}\right) y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} y_k = y_i.$$

即 $\varphi_C \circ \psi_D|_F = id$. $\varphi_C \circ \psi_D(y_i) = y_i$, $i = 1 \dots n$.

$$\Rightarrow \varphi_C \circ \psi_D = id$$

（定理3.2）

同理 $\psi \circ \varphi_C : F[x_1 \dots x_n] \longrightarrow F[x_1 \dots x_n]$

是恒同映射． ▯

设 φ_C 为由线性变量替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

诱导的同构.

~~要直接用…~~

证 因为 φ_C 是同构

$g, h \in F[x_1 \ldots x_n]$

$p \in F[x_1 \ldots x_n]$.

$p = gh \Rightarrow \varphi_C(p) = \varphi_C(gh) = \varphi_C(g)\varphi_C(h)$

$\varphi_C(p) = \varphi_C(g)\varphi_C(h) \Rightarrow \varphi_C^{-1}(\varphi_C(p)) = \varphi_C^{-1}(\varphi_C(g)\varphi_C(h))$

$\Rightarrow p = \varphi_C^{-1} \circ \varphi_C(g)\ \varphi_C^{-1}\varphi_C(h) = gh$

于是 ~~…~~

p 在 $F[x_1 \ldots x_n]$ 中可约 $\Leftrightarrow \varphi_C(p)$ 在 $F[y_1 \cdots y_n]$ 中可约

设 p 是二齐次的. 则 p 可以看成 $F^n \to F$ 的二次型. 在标准基下

$p = (x_1, \ldots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 其中 $A \in M_n(F)$ 对称 ④

把 A 的秩也称为 p 的秩. 记为 $\mathrm{rank}(p)$

命题 ~~定理~~ 13.2 设 $p \in F[x_1 \ldots x_n]$ ~~…~~. 齐二次

如果 $p(x_1 \ldots x_n) = l_1(x_1 \ldots x_n)\, l_2(x_1 \ldots x_n)$, 其 l_1, l_2 是齐一次的 $F[x_1 \ldots x_n]$ 中的多项式

则 $\mathrm{rank}(p) \leqslant 2$

证: 由 $p = l_1 l_2$ 可知

$\forall \vec{x} \in F^n \quad p(\vec{x}) = l_1(\vec{x})\, l_2(\vec{x})$

设 $f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(l_1(\vec{x})\, l_2(\vec{y}) + l_1(\vec{y})\, l_2(\vec{x})\right)$

则 $f \in \mathcal{L}^+(F^n, F)$ 且 f 是二次型 p 的配极

设 $K_1 = \ker(l_1)$, $K_2 = \ker(l_2)$

由维数公式

$$\dim(K_1 \cap K_2) = \dim K_1 + \dim K_2 - \dim(K_1 + K_2)$$
$$\geqslant n-1 + n-1 - n = n-2$$

设 $\vec{\varepsilon}_3, \ldots \vec{\varepsilon}_n \in K_1 \cap K_2$ 线性无关

并把其扩充为 F^n 的基 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots \vec{\varepsilon}_n$

则 $\forall i \geq 3$，$k \in \{1, 2, \dots n\}$

$f(\vec{\varepsilon_k}, \vec{\varepsilon_i}) = f(\vec{\varepsilon_i}, \vec{\varepsilon_k}) = 0$. （见 f 的定义）

于是 P 在 $\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_1}), & f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}), & 0 & \cdots & 0 \\ f(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_1}), & f(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_2}), & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

于是 $\mathrm{rank}(P) \leq 2$

例 $P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in F[x_1, x_2, x_3]$

不可约

~~命题~~13.3 设 $P \in F[x_1, \dots, x_n]$ 齐二次，非零

设 P 在 F^n 的某组基下的矩阵为

$$\cancel{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \dots \lambda_r \in F \text{ 则}$$

(i) $r \geq 3$ 时 P 不可约

(ii) $r \leq 2$ 时 P 可约当且仅当

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 在 $F[y_1, y_2]$ 中

可约

证：(i) ∵ $\mathrm{rank}(P) = r$

∴ (i) 成立（命题 13.2）

(ii) 设 P 在标准基下的矩阵是 A

则存在可逆矩阵 C 使得

$M = C^t A C$ 由线性~~变量~~替换

考虑 ~~同构 / φ_C~~

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

诱导的同构。 $\varphi_C : F[x_1, \dots x_n] \to F[y_1 \dots y_n]$

$$\varphi_C(P) = \varphi_C\left((x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= (y_1 \dots y_n) C^t A C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

由命题 13.1. P 可约 $\Longleftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 可约. ∎

§14. 复二次型.

定理 14.1 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间

q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一

组基

$\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 使得 g 在该基底下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即 $\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\vec{\varepsilon}_n \in V$，$g(\vec{x}) = x_1^2+\cdots+x_r^2$

证：由定理12.1，存在 V 的一组基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 和 $\lambda_1,\cdots\lambda_r \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，使得 g 在 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由代数学基本定理，$\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{C}$，$i=1,2,\cdots r$

考虑基变换

$$(\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & \\ O & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

则 g 在 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$C^t A C = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$ ∎

推论14.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 对称且 $r = \text{rank}(A)$

则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

证：设 $g: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

A 是 g 的矩阵

因为 A 对称，所以

由定理15.1 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ∎

推论14.2 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，对称

则 $A \sim_c B \Longleftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

证："$\Longrightarrow$" 定理10.1

"$\Longleftarrow$" 由推论14.1

$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$B \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，

其中 $r = \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

于是 $A \sim_c B$ ∎

推论14.3 设 $p\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\setminus\{0\}$ 齐二次

则 p 在 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 中可约 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(p)\leq 2$

证："$\Rightarrow$" 命题13.2

"$\Leftarrow$" $\because$ $\operatorname{rank}(p)\leq 2$ $\therefore$

由定理14.1可知. p 作为二次型在 F^n 某组基下的规范型为

$$y_1^2=y_1\cdot y_1 \quad \text{或} \quad y_1^2+y_2^2=(y_1+\sqrt{-1}y_2)(y_1-\sqrt{-1}y_2)$$

由命题13.3. p 可约 ☒

§15 实二次型

定理15.1 (惯性定理). 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间. q 是 V 上二次型

(i) q 在某组基下 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

即 $\forall \vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+x_n\vec{\varepsilon}_n$, $q(\vec{x})=x_1^2+\dots+x_s^2-x_{s+1}^2-\dots-x_{s+t}^2$

(ii) 如果 q 在 V 的另一组基 $\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_n'$ 下的矩阵是

$$A'=\begin{pmatrix} E_{s'} & O & O \\ O & -E_{t'} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $s=s'$ 且 $t=t'$. 即 $A=A'$

证明: (i) 由定理12.1 存在 V 的一组基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 和 $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 使得 q 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

适当调整下标可假设 $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb{R}^+$, $\lambda_{s+1},\dots,\lambda_{s+t}\in\mathbb{R}^-$, 其中 $t=r-s$.

考虑基变换

$$(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+t}}} & \\ O & & & & & & 1\ddots 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

则 q 在 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$C^tAC=\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}_{n\times n}$$

(ii) 因为 $s+t=s'+t'=\mathrm{rank}(q)$，所以

只要证：$s=s'$ 即可。

假设 $s>s'$。令

$U=\langle \vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_s\rangle$，$U'=\langle \vec{\varepsilon}'_{s'+1},\dots,\vec{\varepsilon}'_n\rangle$

$$\dim U\cap U' = \dim U+\dim U' - \dim(U+U')$$
$$\geqslant s+n-s'-n$$
$$= s-s'>0$$

于是 $\exists\, \vec{u}\in U\cap U'$ 且 $\vec{u}\neq\vec{0}$

令 $\vec{u}=\alpha_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+\alpha_s\vec{\varepsilon}_s$，$\alpha_1,\dots\alpha_s$ 不全为零

$\vec{u}=\beta_{s'+1}\vec{\varepsilon}'_{s'+1}+\cdots+\beta_n\vec{\varepsilon}'_n$，$\beta_{s'+1},\dots\beta_n$ 不全为零

$q(\vec{u})=\alpha_1^2+\cdots+\alpha_s^2>0$ $\rightarrow\leftarrow$

$q(\vec{u})=-\beta_{s'+1}^2-\cdots-\beta_{s'+t'}^2<0$

于是 $s\leqslant s'$，同理 $s'\leqslant s$。$\Rightarrow s'=s$ ∎

定义：设 q，s,t 如定理 15.1，则

称 s 是 q 的正惯性指数

t 是 q 的负 ----

(s,t) 称为 q 的签名

注：$\boxed{s+t=\mathrm{rank}(q)}$

推论 15.1 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 对称

则 $\exists!\ s,t\in\mathbb{N}$ 使得

$$A\sim_c\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

证：设 $q:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

因为 A 对称，所以 A 是 q 在标准基下的矩阵。由定理 15.1，$\exists\,\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 使得，q 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 且 s,t 唯一

$\boxed{\text{由于是}}$ 该矩阵与 A 合同 ∎

定义：设 A, s.t 与推论 15.1 相同

称 s 为 A 的正惯性指数

t 为 ⋯ 负 ⋯

(s, t) 为 A 的签名 [注 $s+t=\mathrm{rank}(A)$]

推论 15.2 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，对称

则 $A \sim_c B \iff A, B$ 有相同的签名

证："$\Rightarrow$" $A \sim_c B$，A, B 对称

$\Rightarrow$ A, B 是同一个二次型在不同基底下的矩阵，~~设某签为~~

设 g 的签名是 (s, t)，则 A, B 的签名都是 (s, t)

"$\Leftarrow$" $A \sim_c \mathrm{diag}(\underbrace{1 \cdots 1}_{s} \underbrace{-1 \cdots -1}_{t} 0 \cdots 0) \sim_c B$

$\Rightarrow A \sim_c B$

推论 15.3 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \cdots x_n] \setminus \{0\}$，齐二次

则 p 在 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 可约 $\iff$ p 作为二次型的 $\mathrm{rank}(P)=1$ 或签名为 (1, 1)，~~且~~

证："$\Leftarrow$" 若 $\mathrm{rank}(P)=1$ 或 P 的签名为 (1, −1)

则 P 在 $\mathbb{R}^n$ 的某组基下 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$ 下的规范型为

$P(\vec{y}) = \pm y_1^2$ 或 $P(\vec{y}) = y_1^2 - y_2^2 = (y_1+y_2)(y_1-y_2)$ ~~推理~~ 由命

其中 $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$.

题 13.3 P 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots x_n]$ 中可约.

"$\Rightarrow$" 由命题 13.2 $\mathrm{rank}(P) \leq 2$，于是只要证明当 P 的签名是 (2, 0) 或 (0, 2) 时 P 不可约即可

此时 P 有规范型

$y_1^2 + y_2^2$ 或 $-y_1^2 - y_2^2$.

它们在 $\mathbb{R}[y_1, y_2]$ 中不可约. ∎

~~例★ 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 证明~~ (对任意域成立)

(i) AA^t 是对称的

(ii) AA^t 的负惯性指数为零

~~(iii) $\mathrm{rank}(AA^t) = \mathrm{rank}(A)$~~

例* 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 证明：

(i) A^tA 对称（对任何域都成立）

(ii) A^tA 的负惯性指数是零

(iii) $\mathrm{rank}(A^tA)=\mathrm{rank}(A)$

证：设 $B=A^tA$

(i) $B^t=(A^tA)^t=A^t(A^t)^t=A^tA=B$. B对称

设 $q:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1\cdots x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

则 B 是 q 在标准基下的矩阵（∵B对称）

设 B的签名是 (s,t). 则在 $\mathbb{R}^n$ 的某组基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 下.

$\forall\vec{y}=y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_n\vec{\varepsilon}_n$, ~~q(y)~~

$q(\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2$

(ii) 如果 $t>0$. 则 $q(\vec{\varepsilon}_{s+1})=-1$

但 $\forall\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 设 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

则 $q(\vec{x})=(x_1\cdots x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

$=\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2\geqslant0$ $\rightarrow\leftarrow$

(iii) 由(ii)可知. $\forall\vec{y}=y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_n\vec{\varepsilon}_n$

$q(\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2$

于是 $\mathrm{rank}(q)=s.\Rightarrow\mathrm{rank}(B)=s.$

注意到 $q(\vec{\varepsilon}_{s+1})=\cdots=q(\vec{\varepsilon}_n)=0$

令 $\vec{\varepsilon}_j=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}$, $j=s+1,\cdots,n$. $\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{nj}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}$

$0=q(\vec{\varepsilon}_j)=(\alpha_{1j},\cdots\alpha_{nj})A^tA\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}$

$=(\beta_{1j},\cdots\beta_{nj})\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{nj}\end{pmatrix}$

$=\beta_{1j}^2+\cdots+\beta_{nj}^2$

$\Rightarrow\beta_{1j}=\cdots=\beta_{nj}=0\Rightarrow A\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

即 $\vec{\varepsilon}_{s+1},\cdots\vec{\varepsilon}_n\in V_A\longleftarrow$ 方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间

于是 $\dim V_A\geqslant n-s\Rightarrow\mathrm{rank}(A)\leqslant s$

$\mathrm{rank}(A)\leqslant\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A^tA)\leqslant\mathrm{rank}(A)$

$\Rightarrow\mathrm{rank}(A)\leqslant\mathrm{rank}(B)$

$\Rightarrow\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

§16 Jacobi 公式

引理 16.1 设 $\dim V = n$，$U_1, \dots U_k$ 是 V 中 ~~[illegible]~~ 子空间. ~~[illegible]~~ 且 $\dim U_i \geq n-1$. $(i=1, \dots k)$

则 $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) \geq n-k$.

证：对 k 归纳. $k=1$. ✓

设 $k-1$ 时引理成立. 当 k 时

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) = \dim\left(\left[\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right] \cap U_k\right)$$

$$= \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right) + \dim U_k - \dim\left(\left[\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right] + U_k\right)$$

$$\geq n-k+1 \quad + n-1 \quad - n = n-k \quad \boxed{}$$

推论 16.1 设 $f \in \mathcal{L}_2(V, F)$. $\dim V = n$. $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in V$. 如果 $k < n$. 则

$\exists\ \vec{v} \neq \vec{0}$ 使得 $f(\vec{v}, \vec{v}_i) = 0$, $i=1 \dots k$

证：设 $g_i: \begin{array}{l} V \longrightarrow F \\ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}, \vec{v}_i) \end{array}$ $\quad i=1, \dots k$

则 $g_i \in V^*$ $\quad \ker(g_i)$ 的维数 $\geq n-1$

由引理 16.1 $\quad \bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i)$ 的维数 $\geq n-k \geq 1$

于是 $\exists\ \vec{v} \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i)$ 且 $\vec{v} \neq \vec{0}$. $\quad \vec{v}$ 即为所求 $\boxed{}$

引理 16.2 设 $f \in \mathcal{L}_2(V, F)$，$\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in V$

且 $\forall\ i, j \in \{1, \dots n\}$，$f(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \neq 0$，$f(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$，$i \neq j$

如果 $\exists\ \vec{v} \neq 0$ 使得 $f(\vec{v}, \vec{v}_i) = 0$，$i = 1, \dots k$. 则

$\vec{v} \notin \langle \vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \rangle$.

证：假设 $\vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \rangle$. 则 $\exists\ \alpha_1, \dots \alpha_k \in V$ 使得

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

$$0 = f(\vec{v}, \vec{v}_i) = f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k, \vec{v}_i)$$

$$= \alpha_1 f(\vec{v}_1, \vec{v}_i) + \dots + \alpha_k f(\vec{v}_k, \vec{v}_i)$$

$$= \alpha_i f(\vec{v}_i, \vec{v}_i)$$

$\because f(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \neq 0 \quad \therefore \quad \alpha_i = 0. \quad i = 1, 2 \dots k$

于是 $\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \longrightarrow \longleftarrow \quad \boxed{}$

定义：设 $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$，$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

则 $\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ & \cdots & & \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$ 称为 A 的

一个 k 阶主子式. ~~记为 $\Delta_k(A)$~~

当 $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots i_k = k$ 时. 该主子式称

为 A 的第 k 个顺序主子式 记为 $\Delta_k(A)$

定理16.1（Jacobi）设 $A\in M_n(F)$ 对称，记

$\Delta_0=1,\quad \Delta_k=\Delta_k(A),\ k=1,\dots,n.$

如果 $\Delta_k\neq 0,\ k=1,2,\dots,n$ 则

$$A\sim_c\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & 0\\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \\ 0 & & \ddots \ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\end{pmatrix}$$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。对 n 归纳。

当 $n=1$ 时 $A=(a_{11})=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$ 定理成立

设 $n-1$ 时定理成立 令

$$B=\begin{pmatrix}a_{11},\dots, & a_{1,n-1}\\ \cdots & \\ a_{n-1,1},\dots, & a_{n-1,n-1}\end{pmatrix}$$

则 $\Delta_i=\Delta_i(B)$，$i=1,\dots,n-1$ 且 B 对称。由归纳假设

$$B\sim_c\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\end{pmatrix}=:L$$

则存在 $C\in GL_{n-1}(F)$ 使得 $L=C^tBC$

令 $D=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $D\in GL_n(F)$

直接计算得

$$D^tAD=\begin{pmatrix}C^t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & \vec a\\ \vec a^t & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ 其中\ \vec a=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1\,n}\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}L & \vec b\\ \vec b^t & a_{nn}\end{pmatrix}}_{M},\quad 其中\ \vec b=C^t\vec a\in F^{n-1}$$

于是 $A\sim_c M$。设

$$f:\ F^n\times F^n\longrightarrow F$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1\cdots x_n)M\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则 $f\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$ 且 M 是 f 在标准基 $\vec e_1\dots\vec e_n$ 下的矩阵。特别地

$f(\vec e_i,\vec e_i)=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\neq 0,\quad i=1,2,\dots n-1$

$f(\vec e_i,\vec e_j)=0,\quad i,j\in\{1,2,\dots,n-1\},\ i\neq j$

由推论16.1，$\exists\ \vec v\in V\setminus\{\vec 0\}$ 使得

$f(\vec v,\vec e_i)=0,\quad i=1,2,\dots n-1$，$\vec e_1,\dots\vec e_{n-1},\vec v$ 是 F^n 的一组基

由引理16.2，f 在该基下的矩阵是

$$N=\begin{pmatrix}L & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\ 其中\ \lambda=f(\vec v,\vec v)\neq 0$$

于是 $M \sim_c N \Rightarrow A \sim_c N$

$\Rightarrow \exists\, G \in GL_n(F)$ 使得

$$G^t A G = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

两边取行列式

$$|G^tAG| = |G^t|\,|A|\,|G| = |G|^2 \Delta_n = \lambda \Delta_{n-1}$$

于是

$$\lambda = |G|^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|G|} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|G|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix} \quad ▨$$

§17. 正定二次型与正定矩阵

约定. 本节中. V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间

定义: 设 $q: V \to \mathbb{R}$ 是二次型. 如果 $\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

(i) $q(\vec{x}) > 0$, 则称 q 是正定的;

(ii) $q(\vec{x}) < 0$, ······ 负定的;

(iii) $q(\vec{x}) \geq 0$, 则称 q 是半正定的

(iv) $q(\vec{x}) \leq 0$, 则称 q 是半负定的

定理 17.1 设 q 是 V 上二次型, (s,t) 是其符号差.

(i) q 正定 $\Leftrightarrow s = \dim V$

(ii) q 负定 $\Leftrightarrow t = \dim V$

(iii) q 半正定 $\Leftrightarrow t = 0$

(iv) q 半负定 $\Leftrightarrow s = 0$

证: 设 $n = \dim V$. 在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 下

$\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n\vec{\varepsilon}_n \in V$,

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2 \quad (*)$$

则: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$q(\vec{\varepsilon}_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq s \\ -1, & s+1 \leq i \leq s+t \\ 0 & t+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (**)$$

(i) q 正定 $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, q(\vec{\varepsilon}_i) > 0 \underset{(**)}{\Rightarrow} s = n$

$s = n \underset{\substack{(*) \\ \text{和 } x_1 \dots x_n \text{不全为零}}}{\Rightarrow} \forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$. $q(\vec{x}) > 0$

(ii) 类似.