§17 正定二次型与正定矩阵

给定：本节中 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间

定义：设 $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ 是二次型. 如果 $\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

(i) $q(\vec{x}) > 0$, 则称 q 是正定的

(ii) $q(\vec{x}) < 0$ 则称 q 是负定的

(iii) $q(\vec{x}) \geq 0$ 则称 q 是半正定的

(iv) $q(\vec{x}) \leq 0$ 则称 q 是半负定的

注：当 q 是二次型 $q(\vec{0}) = \vec{0}$

定理 17.1 设 q 是 V 上的二次型，(s,t) 是

~~签名~~ (i) q 正定 $\Longleftrightarrow$ $s = \dim V$

(ii) q 负定 $\Longleftrightarrow$ $t = \dim V$

(iii) q 半正定 $\Longleftrightarrow$ $t = 0$

(iv) q 半负定 $\Longleftrightarrow$ $s = 0$

证：设 $n = \dim V$. 取 V 的基底 $[\vec{\varepsilon}_1 \ldots \vec{\varepsilon}_n]$

有 $\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n \in V$

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 \qquad (*)$$

则 $\forall i \in \{1, \ldots n\}$

$$q(\vec{\varepsilon}_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{1, \ldots s\} \\ -1 & i \in \{s+1, \ldots s+t\} \\ 0 & i \in \{s+t, \ldots, n\} \end{cases} \qquad (**)$$

(i) q 正定 $\Rightarrow$ $\forall i \in \{1, \ldots n\}$, $q(\vec{\varepsilon}_i) > 0$ ~~[(**)]~~

$\Rightarrow s = n$

$s = n \overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \Rightarrow q(\vec{x}) > 0$, 当 $\vec{x} \neq \vec{0}$

(ii) 类似

(iii) q 半正定 $\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots n\}$ $q(\vec{\varepsilon}_i) \geq 0$

$\Rightarrow t = 0$ $(**)$

$t = 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 \Rightarrow q(\vec{x}) \geq 0$

(iv) 类似

注：当 q 正定或负定时，由 $s + t = \mathrm{rank}(q)$

可知：$\mathrm{rank}(q) = \dim V$. 即 q 非退化.

定义：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称，令

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

如果 q_A 是正定（负定，半正定，半负定），则称 A 是正定（负定，半正定，半负定）.

定理 17.2 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称，签名为 (s,t)

则 (i) A 正定 $\Longleftrightarrow s=n$. 即 $A \sim_c E_n$

(ii) A 负定 $\Longleftrightarrow t=n$ 即 $A \sim_c -E_n$

(iii) A 半正定 $\Longleftrightarrow t=0$ 即 $A \sim_c \mathrm{diag}_n(\underbrace{1,\dots,1}_{s}, 0 \dots 0)$

(iv) A 半负定 $\Longleftrightarrow s=0$ 即 $A \sim_c \mathrm{diag}_n(\underbrace{-1,\dots,-1}_{t}, 0 \dots 0)$

证明 直接应用定理 17.1.

注 当 A 正定或负定时 $\mathrm{rank}(A)=n$

即 A 满秩

注：二次型 q 和矩阵 A 是（半）负定

$\Longleftrightarrow -q$ 和 $-A$ 是（半）正定的

定理 17.3 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称

(i) A 半正定 $\Longleftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A = B^t B$

(ii) A 正定 $\Longleftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$

证：(i) 设 $r = \mathrm{rank}(A)$，$D_r = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n}$

则 $D_r^t = D_r$（对称性）和 $D_r^2 = D_r$（幂等性）

"$\Rightarrow$" A 半正定 $\Rightarrow A \sim_c D_r$（定理 17.2）

$\Rightarrow \exists C \in GL_n(\mathbb{R})$，$A = C^t D_r C$

$\Rightarrow A = C^t D_r D_r C$（幂等性）

$\Rightarrow A = C^t D_r^t D_r C$（对称性）

$\Rightarrow A = (D_r C)^t (D_r C)$.

令 $B = D_r C$ 即可

"$\Leftarrow$" 由例 $\star$ (ii). A 的负惯性指数为零

A 半正定

(ii) "$\Rightarrow$" A 正定 $\Rightarrow A$ 半正定

$\xRightarrow{(i)} A = B^t B$，$B \in M_n(\mathbb{R})$

$\because \mathrm{rank}(A) = n \quad \therefore \mathrm{rank}(B) = n \Rightarrow B \in GL_n(\mathbb{R})$

"$\Leftarrow$" $\mathrm{rank}(B) = n \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = n$，设 (s,t) 是 A 的签名

由 (i). A 半正定. 于是 A 的负惯性指数 $t=0$ 所以 $s=n$

因为 $s+t = \mathrm{rank}(A) = n$.

$\Rightarrow A$ 正定（定理 17.2）

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 正定，证明 $A+B$ 也正定

证：设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 对称

$$q_M: \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \dots x_n) M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

是在标准基下矩阵为 M 的二次型，于是

q_A, q_B 正定 且 $q_A + q_B = q_{A+B}$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$q_{A+B}(\vec{x}) = q_A(\vec{x}) + q_B(\vec{x}) > 0$$

$\Rightarrow q_{A+B}$ 正定 $\Rightarrow A+B$ 正定

例：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 正定，

证明 (i) $|A| > 0$ (ii) A^{-1} 正定

证：(i) $A = B^t B$ 其中 $B \in GL_n(\mathbb{R})$. [定理 17.3]

$$|A| = |B^t||B| = |B|^2 > 0$$

(ii) $A^{-1} = (B^t B)^{-1} = B^{-1}(B^t)^{-1} = B^{-1}(B^{-1})^t$

设 $C = (B^{-1})^t$

$$A^{-1} = C^t C \Rightarrow A^{-1} \text{ 正定 } \square$$

引理 17.1 设 A 正定，则 A 的任何主子式为正。

证：设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ & \dots & & \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

由上例 (i) 可知，要证 $|M| > 0$ 只要证 M 正定

$q_M: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 是 A 和 M

$q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

对应的二次型。

$\forall \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$，$\vec{z} \ne 0$，设 $\vec{x} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_1 \\ \vdots \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i_1 \\ \\ i_2 \\ \\ i_k \\ \\ \\ \end{array}$

即 $\vec{x}$ 的第 i_l 个坐标为 z_l，$l = 1, 2, \dots, k$。

其它坐标为零，则 $\vec{x} \ne 0$ 直接验证

可得 $q_M(\vec{z}) = q_A(\vec{x}) > 0$

$\Rightarrow q_M$ 正定 $\Rightarrow M$ 正定 $\square$

注 M是正定矩阵

定理 17.4 (Sylvester 判别法)，设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称

~~正定对称~~ 则 A 正定 $\Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta_i(A) > 0$$

证："$\Longrightarrow$" 引理17.1

"$\Longleftarrow$" 由 Jacobi 定理

$$A \sim_c \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}}_{B}$$

其中 $\Delta_0=1$, $\Delta_k=\Delta_k(A)$. $k=1,2\ldots n$

$\because \frac{\Delta_1}{\Delta_0}>0, \ldots \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}>0$ $\therefore$ B正定

$\Longrightarrow$ A正定 $\boxed{}$

例：设 $M=\begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. 当$\alpha$取何值时 M是正定的.

解：$\Delta_1(M)=\alpha$ $\Delta_2(M)=\alpha^2-1$, $\Delta_3(M)=(\alpha-1)^2(\alpha+2)$

M正定 $\Longleftrightarrow \alpha>0$, $\alpha^2-1>0$ 和 $(\alpha-1)^2(\alpha+2)>0$

$\Longleftrightarrow \alpha>1$.

$\boxed{\text{正定性的应用}}$

例：设A是n阶正定矩阵 证明

$\forall \alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{R}$, 不全为零时

$$D=\begin{vmatrix} A & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} \\ \alpha_1\ldots\alpha_n & 0 \end{vmatrix}<0$$

设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix} \\ \alpha_1\ldots\alpha_n & 0 \end{pmatrix}$.

证：$\because$ A正定 $\therefore$ $E_n=B^t\cancel{A}B$ 其中 $B\in GL_n(\mathbb{R})$

令 $C=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 C可逆

$$C^t\tilde{A}C=\begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \vec{\alpha} \\ \vec{\alpha}^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B^tA & B^t\vec{\alpha} \\ \alpha^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B^tAB & B^t\vec{\alpha} \\ \alpha^tB & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & B^t\vec{\alpha} \\ \alpha^tB & 0 \end{pmatrix}$$

$(\because B^t$可逆, $\vec{\alpha}\neq\vec{0})$

令 $\vec{\beta}=B^t\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

则 $C^t\tilde{A}C=\begin{pmatrix} E_n & \vec{\beta} \\ \vec{\beta}^t & 0 \end{pmatrix}$

$$|C^t\tilde{A}C|=\begin{vmatrix} 1 & & & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & & & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \beta_n \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta_1^2-\cdots-\beta_n^2 \end{vmatrix}$$

$=-\beta_1^2-\cdots-\beta_n^2<0$ $\boxed{}$

例：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$

证明：(i) 如果A正定，则

$|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

(ii) $|A|^2\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)$

(Hadamard不等式)

证: (i) 对于 n 归纳. $n=1$ $A=(a_{11})$, $a_{11}>0$

$|A| = a_{11} \leq a_{11}$ ✓

设 $n-1$ 时 ~~因~~ 结论成立. 令

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & \cdots & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

由 Sylvester 判别法 A_{n-1} 正定

[A_{n-1} 对称, 且 $\Delta_i(A_{n-1}) = \Delta_i(A) > 0, i=1\cdots n-1$]

由归纳假设 $|A_{n-1}| \leq a_{11} \cdots a_{n-1,n-1}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \begin{matrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_i = a_{in}$, $i=1,2,\ldots,n-1$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \begin{matrix} 0+\alpha_1 \\ \vdots \\ 0+\alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1} \ \cancel{a_{n,n-1}\ a_{nn}} & a_{nn}+0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det(A_{n-1})\ a_{nn} + (-\alpha_1^2 - \cdots - \alpha_{n-1}^2)$$

(见上例)

$$\leq \det(A_{n-1})\ a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$ ☐

(ii) ~~设 B 是 A^tA~~ 当 $|A|=0$ 时.

不等式~~显然~~成立

设 $A \neq 0$. 令 $B = A^t A$

则 B 正定. 设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$. $A^t = (a'_{ij})_{n\times n}$. 则 $a'_{ij} = a_{ji}$

由 (i)

$$|A|^2 = |B| \leq b_{11} \cdots b_{nn}$$

$$\cancel{= |B|} = \prod_{i=1}^n b_{ii} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a'_{ij} a_{ji} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji}^2 \right)$$ 即

注: $\because |A^t| = |A| \therefore \Rightarrow |A|^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)$

改正：

例：设 A 是 n 阶正定矩阵. ~~证明~~

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 不全为零

证明 $D = \begin{vmatrix} A & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{matrix} \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n & 0 \end{vmatrix} < 0$

令 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{matrix} \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n & 0 \end{pmatrix}$

把证明过程中所有 C^tAC 改为

$C^t\tilde{A}C$，即可

定理 17.4 Sylvester 判别法

$A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称

A 正定 $\Longleftrightarrow \Delta_i(A) \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, n$

例 $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$，

§18 仿射同构下的二次曲面

回忆 §13.

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 是两组"变量"

$A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\vec{x} = A\vec{y}$; $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$

称为线性变量替换. 它诱导同构

$\varphi_A : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ 满足

$\varphi_A|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$. $\varphi_A(x_i) = \vec{A_i}\,\vec{y}$, $i = 1, \dots, n$

$\varphi_{A^{-1}}$ $\mathbb{R}[y_1, \dots, y_n] \longrightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 满足

$\varphi_{A^{-1}}|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$. $\varphi_{A^{-1}}(y_i) = \vec{A_i^{-1}}\,\vec{x}$.

由 $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = id_{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]}$ 和

$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = id_{\mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]}$ 可知

φ_A 是同构且 $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

平移变量替换. 设 $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{\alpha}$, $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}$.

诱导出同构

$\varphi_{\vec{\alpha}} : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ 满足

$\varphi_{\vec{\alpha}}|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$. $\varphi_{\vec{\alpha}}(x_i) = y_i + \alpha_i$

同样 $\varphi_{-\vec{\alpha}} : \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

$\varphi_{-\vec{\alpha}}|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$. $\varphi_{-\vec{\alpha}}(y_i) = x_i - \alpha_i$

可直接验证

$\varphi_{-\vec{\alpha}} \circ \varphi_{\vec{\alpha}} = id_{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]}$ $\quad \varphi_{\vec{\alpha}} \circ \varphi_{-\vec{\alpha}} = id_{\mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]}$

$\Rightarrow$ $\varphi_{\vec{\alpha}}$ 是同构.

称为由平移变量替换诱导出的同构

由有限个线性替换和平移替换诱导出的同构的复合 (当复合有意义时). 称为仿射同构

容易验证: 仿射同构是由下列变量替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

依照同样方式诱导出的从 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 到 $\mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$

的同构．

定理 18.7 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n]$. $\deg(p) = 2$

设 h 是 p 的齐二次部分．设

h 被视为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的二次型 的签名为 (s, t)

则 存在 ~~仿射~~同构

$$\varphi: \mathbb{R}[x_1 \dots x_n] \to \mathbb{R}[y_1 \dots y_n]$$

使得

$$\varphi(p) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_{s+t}^2 + \lambda y_{s+t+1} + \mu$$

其中 ~~当 $s+t = n$ 时. y_{s+t+1}~~ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

证：由惯性定理．

$\exists\ C \in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

$$p(\vec{x}) = p(C\vec{y}) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots y_{s+t}^2 + 2\alpha_1 y_1 + \dots + 2\alpha_s y_s - 2\alpha_{s+1} y_{s+1} - \dots - 2\alpha_{s+t} y_{s+t} + \beta_{s+t+1} y_{s+t+1} + \dots + \beta_n y_n + \delta$$

其中 α_i. β_j. γ_k, $\delta \in \mathbb{R}$

8

$$p(\vec{x}) = p(C\vec{y}) = (y_1 + \alpha_1)^2 + \dots + (y_s + \alpha_s)^2 - (y_{s+1} + \alpha_{s+1})^2 - \dots (y_{s+t} + \alpha_{s+t})^2 + \gamma_{s+t+1} y_{s+t+1} + \dots + \gamma_n y_n + \delta$$

$\delta \in \mathbb{R}$

$$\vec{y} = \vec{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \alpha_{s+1} \\ \alpha_{s+t} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} = \vec{z} + \vec{\alpha}$$

$$p(\vec{x}) = p(C\vec{y}) = p(C(\vec{z} + \vec{\alpha})) = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_{s+t}^2 + \gamma_{s+t+1} z_{s+t+1} + \dots + \gamma_n z_n + \delta$$

若 $\gamma_{s+t+1} z_{s+t+1} + \dots + \gamma_n z_n = 0$. 则取 $\lambda = 0$, $\mu = \delta$

即可. 否则 不妨设 $\gamma_{s+t+1} \neq 0$

$w_1 = z_1$

$\vdots$

$w_{s+t} = z_{s+t}$

$w_{s+t+1} = \gamma_{s+t+1} z_{s+t+1} + \dots + \gamma_n z_n$

$w_{s+t+2} = z_{s+t+2}$

$\vdots$

$w_n = z_{s+t+n}$

$$\vec{w} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{s+t} & & & \\ & \gamma_{s+t+1} & \gamma_{s+t+2} \cdots & \gamma_n \\ & & 1 & \\ & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$D \in GL_n(\mathbb{R})$

$p(\vec{z}) = p(C\vec{y}) = p(C(\vec{z}+\vec{\alpha})) = p(C(D'W+\alpha))$

$= p(C\cancel{D}'\vec{W} + C\vec{\alpha}) = w_1^2 + \cdots + w_s^2 - w_{s+1}^2 \cdots w_{s+t}^2$

$+ \lambda w_{s+t+1} + \mu$. ▣

注：在定理18.1中 $\lambda \in \{0, 1\}$.

~~注. 定理18.1 对于一般非...~~

推论18.1 设 $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$. $\deg p = 2$

h 为 p 的齐二次部分 h 的签名为 (s, t)

令 $r = s+t$.

则 ∃ ~~仿射~~ 仿射同构 $\varphi: \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n] \to \mathbb{R}[y_1 \ldots y_n]$

使得 $\varphi(p) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2 + y_{r+1}$

或 $\varphi(p) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots y_r^2 + \xi$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$

证明 ∃ ~~仿射~~ 仿射同构 $\varphi: \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n] \to \mathbb{R}[y_1 \ldots y_n]$

使得 $\varphi(p) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 \cdots - y_r^2 + \lambda y_{r+1} + \mu$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

若 $\lambda = 0$, 则令 $\xi = \mu$ 即可

否则 考虑变量替换 (线性)

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \cdots$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ \lambda y_{r+1} + \mu \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 即可

▣

设 $P \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ $\deg P = 2$.

~~的零点~~ 在 $\mathbb{R}^n$

$p(x_1 \ldots x_n) = 0$

中的轨迹 称为 $\mathbb{R}^n$ 中二次曲面

我们来考虑：P 在仿射同构意义下的轨迹

设 r 是 p 的齐二次部分的秩.

(s, t) 是 — — — — — 签名.

$n = 2$

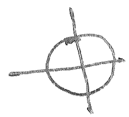
~~(A) $r = 2$~~ 情形1. $r = 2$

$(s, t) = (2, 0)$ $y_1^2 + y_2^2 + \xi = 0$

若 $\xi < 0$ "圆"

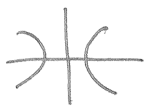
若 $\xi = 0$ "点" 退化

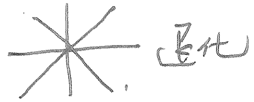
若 $\xi > 0$ "$\varnothing$"



$(s,t)=(1,1)$

$y_1^2-y_2^2+\xi=0$ $\xi\neq0$

$\xi\neq0$. 双曲线 

$\xi=0$ 两条直线  退化

$(s,t)=(0,2)$ 已在 $(s,t)=(2,0)$ 考虑过

$r=1$. $(1,0)$  抛物线

$y_1^2+y_2=0$

$y_1^2+\xi=0$ 退化

$n=3$

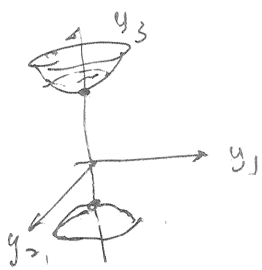
$r=3$.

$(s,t)=(3,0)$ $y_1^2+y_2^2+y_3^2+\xi=0$ 

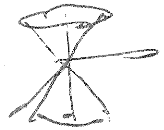
$\xi<0$ "球"

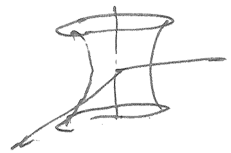
$\xi\geq0$ 退化

$(s,t)=(2,1)$ $y_1^2+y_2^2-y_3^2+\xi=0$



$\xi>0$ 双叶双曲面

$\xi=0$ 

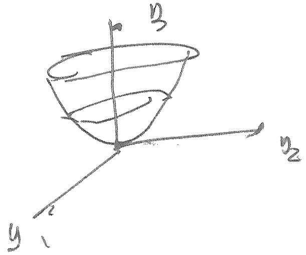
$\xi<0$ 

单叶双曲面

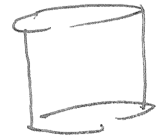
$(s,t)=(1,2)$. $(s,t)=(0,3)$ 已考虑

$r=2$

$(2,0)$ $y_1^2+y_2^2+y_3=0$



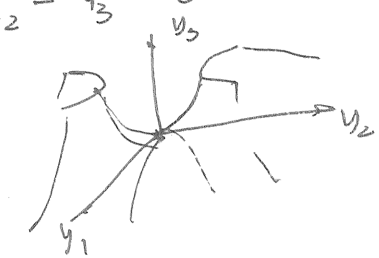
椭圆抛物面

$(2,1)$ $y_1^2+y_2^2+\xi=0$ 

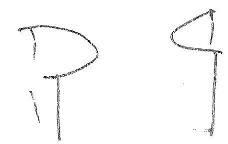
$\xi<0$ 椭圆柱面

$\xi\geq0$ 退化

$(1,1)$ $y_1^2-y_2^2-y_3=0$



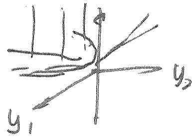
双曲抛物面

$(0$ $y_1^2-y_2^2=\xi$ 

$(0,2)$ 已考虑

$r=1$

$(1,0)$ $y_1^2+y_2=0$



抛物柱面

$y_1^2+z=0$ 退化

$(0,1)$ 已考虑.

§19 斜对称双线性型的规范型

回忆：$f\in\mathcal{L}_2(V,F)$ 称为斜对称的

如果 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$, $f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$

斜对称双线性的集合记为 $\mathcal{L}_2^-(V,F)$.

它是 $\mathcal{L}_2(V,F)$ 的子空间.

$A\in M_n(F)$ 是斜对称的. 如果 $A^t=-A$.

$f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)$ $\Longleftrightarrow$ f 在 V 的基底下的矩阵是斜对称的.

引理 19.1 设 $A\in M_n(F)$ 斜对称.

则 $\det(A)=(-1)^n\det(A)$

特别地，当 n 为奇数时，$\det(A)=0$

证：$A^t=-A$

$\det(A)=\det(A^t)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$

当 n 奇数时 $\det(A)=-\det(A)\Rightarrow$

$2\det(A)=0\Rightarrow\det(A)=0$ $(2\neq 0)$

引理 19.2 设 $f\in\mathcal{L}_2(V,F)$.

$f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)\Longleftrightarrow\forall\vec{x}\in V,\ f(\vec{x},\vec{x})=0$

证："$\Rightarrow$" $f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})\Rightarrow f(\vec{x},\vec{x})=-f(\vec{x},\vec{x})$

$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{x})=0$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x},\vec{y}\in V$

$0=f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})+f(\vec{x},\vec{x})+f(\vec{y},\vec{y})$

$=f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})\Rightarrow f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$ $\boxed{}$

引理 19.3 设 $f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)$, $\vec{u},\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

如果 $f(\vec{u},\vec{v})\neq 0$, 则 $\vec{u},\vec{v}$ 线性无关

证：假设 $\vec{u}=\alpha\vec{v}$, 其中 $\alpha\in F\setminus\{0\}$

$0\neq f(\vec{u},\vec{v})=f(\alpha\vec{v},\vec{v})=\alpha f(\vec{v},\vec{v})=0$ (引理 19.2)

$\rightarrow\leftarrow$ $\boxed{}$

12

例：设 $\dim V=1$，$f\in \mathcal{L}_2^-(V,F)$

设 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$，$\forall \vec{x},\vec{y}\in V$，$\vec{x}=\lambda\vec{v}$，$\vec{y}=\mu\vec{v}$。

$\lambda,\mu\in F$

$$f(\vec{x},\vec{y})=f(\lambda\vec{v},\mu\vec{v})=\lambda\mu f(\vec{v},\vec{v})=0$$

$$\Rightarrow f=0$$

设 $\dim V=2$，且 $f\in \mathcal{L}_2^-(V,F)\setminus\{0\}$

则 $\exists\ \vec{e_1},\vec{e_2}\in V$，使得

$$f(\vec{e_1},\vec{e_2})\neq 0 \underset{(\text{引理}19.3)}{\Rightarrow} \vec{e_1},\vec{e_2}\ \text{线性无关}$$

不妨设 $f(\vec{e_1},\vec{e_2})=1$

于是 $V=\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\rangle$，$\forall \vec{x},\vec{y}\in V$。

$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}$

$$f(\vec{x},\vec{y})=f(x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2},\ y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2})$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

f 在 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

定义：设 $f\in \mathcal{L}_2^-(V,F)$，$W\subset V$ 是 2 维子空间。~~如果~~ $\exists\ \vec{w_1},\vec{w_2}\in W$，使得

$$f(\vec{w_1},\vec{w_2})\neq 0$$

则称 W 是 f 的辛平面（simplectic plane）

引理 ~~定理~~ 19.4　设 $f\in \mathcal{L}_2^+(V,F)$ 则

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_m\oplus K$$

其中 (i) $W_1,\ldots,W_m$ 是 f 的辛平面

(ii) $\forall i,j\in\{1,\ldots,m\}$，$\vec{w_i}\in W_i$，$\vec{w_j}\in W_j$

$$f(\vec{w_i},\vec{w_j})=0$$

(iii) $K=\{\vec{v}\in V \mid \forall \vec{x}\in V,\ f(\vec{x},\vec{v})=0\}$

证：先验证 K 是 V 的子空间　$\forall \vec{x}\in V$

$\forall\ \vec{u},\vec{v}\in K$　$\alpha,\beta\in F$，

$$f(\vec{x},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{x},\vec{u})+\beta f(\vec{x},\vec{v})=0$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in K \Rightarrow K\ \text{是子空间}$$

当 $f=0$ 时，则令 $m=0$，$V=K$。

设 $f\neq 0$，则 $\exists\ \vec{v_1},\vec{v_2}\in V$，使得

$$f(\vec{v_1},\vec{v_2})\neq 0$$

由引理 19.3，$\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关，于是

$\dim V\geqslant 2$。