回忆: 设 $f\in \mathcal{L}_2^-(V,F)$. 设 $\vec{u},\vec{v}\in V$

如果 $f(\vec{u},\vec{v})\neq 0$, 则 $\vec{u},\vec{v}$ 线性无关.

当 $\dim V=1$ 时, $\mathcal{L}_2^-(V,F)=\{0\}$

例: 设 $\dim V=2$. 如果 ~~存在~~ $f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)$

且 $f\neq 0$. 则 $\exists\, \vec{e}_1,\vec{e}_2\in V$ 使得

$$f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\neq 0.$$

于是 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是 V 的一组基.

不妨设 $f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=1$

则 f 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} f(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & f(\vec{e}_1,\vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_2,\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2,\vec{e}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$, $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$$

$$= (-x_2, x_1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix} = x_1y_2-y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

定义: 设 $f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)$, $W\subset V$ 是二维子空间, 如果存在 $\vec{w}_1,\vec{w}_2\in W$ 使得

$$f(\vec{w}_1,\vec{w}_2)\neq 0$$

则称 W 是 f 的辛平面 (symplectic plane)

引理 19.4 设 $f\in\mathcal{L}_2^-(V,F)$. 则

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_n\oplus K$$

其中 (i) $W_1,\dots,W_m$ 是辛平面

(ii) $\forall\, i,j\in\{1,\dots,m\}$, $\vec{w}_i\in W_i$, $\vec{w}_j\in W_j$

$$f(\vec{w}_i,\vec{w}_j)=0$$

(iii) $$K=\{\vec{v}\in V \mid \forall \vec{x}\in V,\ f(\vec{x},\vec{v})=0\}$$

证: 先验证 K 是 V 的子空间. 设 $\vec{x}\in V$

设 $\vec{u},\vec{v}\in K$, $\alpha,\beta\in F$

$$f(\vec{x},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{x},\vec{u})+\beta f(\vec{x},\vec{v})=0$$

于是 $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in K$. 验证完毕

当 $f=0$ 时. 令 $m=0$, $K=V$ 即可

设 $f\neq 0$. 则 $\exists\ \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, 使得 $f(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\neq 0$.

由引理19.3, $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关. 于是 $\dim V\geq 2$

对 $\dim V$ 归纳

当 $\dim V=2$. 则由上例可知 V 是 f 的

辛平面. 令 $W_1=V$, $K=\{\vec{0}\}$ 即可.

设引理对 $\dim V<n$ 成立. 设 $\dim V=n$.

因为 $f\neq 0$. 所以 $\exists\ \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ 使得

$f(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\neq 0$. 令 $W_1=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle$ 和

$$W_1'=\{\vec{v}\in V\mid f(\vec{v},\vec{v}_1)=f(\vec{v},\vec{v}_2)=0\}$$

断言1 $V=W_1\oplus W_1'$

断言的证明: 设 $\vec{w}\in W_1\cap W_1'$.

$\because \vec{w}\in W_1$ $\therefore \exists\ \alpha_1,\alpha_2\in F$ 使得

$$\vec{w}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$$

$\because \vec{w}\in W_1'$ $\therefore$ $0=f(\vec{w},\vec{v}_1)=f(\vec{w},\vec{v}_2)$

$$0=f(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2,\vec{v}_1)$$

$$=\alpha_1 f(\vec{v}_1,\vec{v}_1)+\alpha_2 f(\vec{v}_2,\vec{v}_1)=\alpha_2 f(\vec{v}_2,\vec{v}_1)$$

$\because$ $f(\vec{v}_2,\vec{v}_1)=-f(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\neq 0$. $\alpha_2=0$

同样地, 由 $f(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2,\vec{v}_2)\neq 0$ 可推出 $\alpha_1\neq 0$

~~断~~ 于是 W_1+W_1' 是直和.

设. $l_i: V\longrightarrow F$

$\vec{x}\longmapsto f(\vec{x},\vec{v}_i)$. $i=1,2$.

$W_1'=\langle l_1,l_2\rangle^0 \Rightarrow \dim W_1'=n-\dim\langle l_1,l_2\rangle\geq n-2$

于是 $\dim(W_1+W_1')=\dim W_1+\dim W_1'\geq n$

$\Rightarrow \dim(W_1+W_1')=n \Rightarrow V=W_1\oplus W_1'$.

断言1成立

断言2. $\forall\ \vec{w}_1\in W_1$, $\vec{w}_1'\in W_1'$, $f(\vec{w}_1,\vec{w}_1')=0$.

证: 设 $\vec{w}_1=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$.

$f(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=f(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2,\vec{w}_1')=\alpha_1 f(\vec{v}_1,\vec{w}_1')+\alpha_2 f(\vec{v}_2,\vec{w}_2')$

$$=-\alpha_1 f(\vec{w}_1',\vec{v}_1)-\alpha_2 f(\vec{w}_1',\vec{v}_2)=0$$

断言2成立

令 $g = f|_{W_1' \times W_1'}$ 即 $g: W_1' \times W_1' \longrightarrow F$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$

由归纳假设

$$W_1' = W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus \tilde{K}$$

其中 (i)' $W_2, \cdots, W_m$ 是 g 的辛平面

(ii)' $\forall i, j \in \{2, \cdots, m\}$, $\vec{w_i} \in W_i$, $\vec{w_j} \in W_j$

$$g(\vec{w_i}, \vec{w_j}) = 0$$

(iii)' $\tilde{K} = \{\vec{v} \in W_1' \mid \forall \vec{x} \in W_1', g(\vec{x}, \vec{v}) = 0\}$

于是

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus \tilde{K}$$

下面要验证上述分解满足 (i), (ii), (iii).

因为 $W_2, \cdots, W_m$ 是 g 的辛平面. 它们也是 f 的辛平面. 于是 (i) 满足.

设 $i, j \in \{2, \cdots, m\}$ $\vec{w_i} \in W_i$. $\vec{w_j} \in W_j$

由 (ii)' $0 = g(\vec{w_i}, \vec{w_j}) = f(\vec{w_i}, \vec{w_j})$ ~~=0~~

设 $\vec{w_1} \in W_1$ 则 由引理2

$$f(\vec{w_1}, \vec{w_i}) = 0 \quad i = 2, \cdots m$$

(ii) 满足

以下验证: $K = \tilde{K}$ ③

设 $\vec{v} \in K$. 则 由引理1

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \vec{w_1'}, \quad \vec{w_1'} \in W_1'$$

$$0 = f(\vec{v_1}, \vec{v}) = f(\vec{v_1}, \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \vec{w_1'})$$

$$= \alpha_1 f(\vec{v_1}, \vec{v_1}) + \alpha_2 f(\vec{v_1}, \vec{v_2}) + f(\vec{v_1}, \vec{w_1'})$$

$$= \alpha_2 f(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \quad \Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

由 $f(\vec{v_2}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{v} \in W_1'$. 由 K 和 $\tilde{K}$ 的定义可知

$\vec{v} \in \tilde{K} \Rightarrow \tilde{K} \subset K$

设 $\vec{v} \in \tilde{K}$. $\vec{x} \in V$. $\exists \vec{y} \in W_1$, $\vec{z} \in W_1'$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = f(\vec{y} + \vec{z}, \vec{v}) = f(\vec{y}, \vec{v}) + f(\vec{z}, \vec{v})$$

$$= \underset{(引理2)}{0} + \underset{(\tilde{K}的定义)}{0}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

(iii) 成立 $\square$

定理19.1 设 $f\in \mathcal{L}_2^-(V,F)$. 则 V 有一组基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_{2m-1},\vec{e}_{2m},\vec{e}_{2m+1},\cdots,\vec{e}_n$

使得在该基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} S_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其中 $S_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 从而

$\forall \vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n,\ \vec{y}=y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n\in V$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{2m-1} & y_{2m-1} \\ x_{2m} & y_{2m} \end{vmatrix}$$

证: 由引理19.1

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_m\oplus K$$

其中 $W_1,\cdots,W_m,K$ 由引理19.1给出

$\forall i\in\{1,\cdots,m\}$ 可取 W_i 的基 $\vec{e}_{2i-1},\vec{e}_{2i}$

使得 $f(\vec{e}_{2i-1},\vec{e}_{2i})=1$

设 K 的基为 $\vec{e}_{2m+1},\cdots,\vec{e}_n$

由 (*) $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_{2m-1},\vec{e}_{2m},\vec{e}_{2m+1},\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的基, f 在该基下的矩阵

$$\left(f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\right)_{n\times n}=A$$

推论19.1. 设 $A\in M_n(F)$, 斜对称

则 $$A\sim_c \begin{pmatrix} S_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

（S_2 共 m 个）

证: 由定理19.1直接可得 ▨

推论19.2 设 $A\in M_n(F)$, 斜对称

则 $\mathrm{rank}(A)$ 是偶数

证: 由推论19.1直接得出 ▨

推论19.3 设 $A,B\in M_n(F)$ 斜对称

则 $A\sim_c B \iff \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

证: 由推论19.1直接可得

例：(Pfaffian) 设 $A\in M_{2m}(\mathbb{Z})$，$\det(A)\neq 0$. 则 $\exists k\in\mathbb{Z}$ 使得 $\det(A)=k^2$

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，∵ $a_{ij}\in\mathbb{Z}$

∴ $\det(A)\in\mathbb{Z}$

由推论19.1，$\exists C\in GL_n(\mathbb{Q})$

$$A=C^t\begin{pmatrix} \overbrace{S_2 & & \\ & \ddots & \\ & & S_2}^{m}\end{pmatrix}C$$

$$|A|=|C|^2$$

∵ $|A|\in\mathbb{Z}$，$|C|\in\mathbb{Q}$ ∴ $|C|\in\mathbb{Z}$ ▯

注：称 $|C|$ 为矩阵A的Pfaffian，记为 $\mathrm{Pf}(A)$.

总结：$A,B\in M_n(F)$. 如果存在 $C\in GL_n(F)$ 使得 $B=C^tAC$ 则称 $A\sim_c B$

A对称

$$A\sim_c\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

$F=\mathbb{C}$

$$A\sim_c\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$F=\mathbb{R}$

$$A\sim_c\begin{pmatrix}E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}\text{正定} & s=n \\ \text{半正定} & t=0 \\ \text{负定} & t=n \\ \text{半负定} & s=0\end{cases}$

$A\in M_n(F)$ 斜对称

$$A\sim\begin{pmatrix}S_2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

齐二次多项式通过线性变量替换—有规范型

二次多项式通过仿射变量替换—有规范型

二次联立方程组和三次及以上多项式

属于非线性

$$\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)\oplus\mathcal{L}_2^-(V,F)$$

规范基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ ，$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$

$$A = B + C$$

$$P^tBP \qquad Q^tCQ.$$

第二章 线性~~映射~~算子

约定：在本章中 F 是域，特征任意。F 上的线性空间都是有限维的

§1 线性映射的矩阵

设 V, W 是 F 上的线性空间，$\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从 V 到 W 的线性映射的集合。它是 F 上的线性空间

§1.1 矩阵表示

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的基，$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的基。$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$。$\forall j\in\{1,\dots,n\}$

$$\varphi(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{\varepsilon}_i.$$

令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

则 $(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)A$

称 A 为 φ 在基底 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$；$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵

设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n\in V$，

$$\varphi(\vec{x})=y_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+y_m\vec{\varepsilon}_m\in W$$

则

$$\varphi(\vec{x})=x_1\varphi(\vec{e}_1)+\dots+x_n\varphi(\vec{e}_n)=(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n))\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$$

于是 $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

§1.2 ~~相对基底不同的~~线性映射的换矩阵表示

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$，$\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 是 V 的两组基；$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$；$\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_m'$ 是 W 的两组基

设 $(\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)P$，$P\in GL_n(F)$

$(\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_m')=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)Q$，$Q\in GL_m(F)$

$$(\varphi(\vec{e}_1'), \dots, \varphi(\vec{e}_n')) \triangleq \varphi(\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$$

$$= \varphi((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)P)$$

$$= (\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n))P$$

$$= (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m)AP$$

$$= (\vec{\varepsilon}_1', \dots, \vec{\varepsilon}_m')Q^{-1}AP.$$

于是 φ 在 $\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'$, $\vec{\varepsilon}_1', \dots, \vec{\varepsilon}_m'$ 下的矩阵是 $Q^{-1}AP$.

特别地 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(Q^{-1}AP)$

于是有定义:

设 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$. $A \in F^{m\times n}$ 是 φ 的矩阵

则 φ 的秩定义为 $\operatorname{rank}(A)$, 记为 $\operatorname{rank}(\varphi)$.

例: $\varphi: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$

$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

取基底 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 为 $1, x, \dots, x^{n-1}$

$\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 为 $1, x, \dots, x^{n-1}$

$$(\varphi(1), \varphi(x), \dots, \varphi(x^{n-1})) = (0, 1, 2x, \dots, (n-1)x^{n-2})$$

$$= (1, x, \dots, x^{n-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$\operatorname{rank}(\varphi) = n-1$

例 设 $P \in F^{k\times m}$.

$$\varphi: F^{m\times n} \longrightarrow F^{k\times n}$$

$$X \longmapsto PX$$

求 $\operatorname{rank}(\varphi)$

解: $\varphi(X) = PX = P(\vec{X}^{(1)}, \dots, \vec{X}^{(n)})$

$$= (P\vec{X}^{(1)}, \dots, P\vec{X}^{(n)})$$

于是

$$(\overrightarrow{\varphi(X)}^{(1)}, \dots, \overrightarrow{\varphi(X)}^{(n)}) = (P\vec{X}^{(1)}, \dots, P\vec{X}^{(n)})$$

于是

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi(X)}^{(1)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\varphi(X)}^{(m)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(m)} \end{pmatrix}$$

$A \in F^{kn \times mn}$ $\quad \mathrm{rank}(A) = n \cdot \mathrm{rank}(P)$.

命题1.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

$$\mathrm{rank}(\varphi) = \dim(\mathrm{im}(\varphi))$$

证: 设 A 是 φ 在 V 的基底 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵. 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \in V$

$$\vec{x} \in \ker(\varphi) \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\dim\ker(\varphi) = n - \mathrm{rank}(A) = n - \mathrm{rank}(\varphi)$.

由线性映射的维数公式

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi)) = \mathrm{rank}(\varphi). \quad ▨$$

推论1.1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, 其中 $\dim V = n$, $\dim W = m$. 则

(i) φ 是单射 $\iff \mathrm{rank}(\varphi) = n$

(ii) φ 是满射 $\iff \mathrm{rank}(\varphi) = m$.

证: (i) $\dim\ker(\varphi) + \mathrm{rank}(\varphi) = n$ (命题1.1 和线性映射维数公式)

于是 $\mathrm{rank}(\varphi) = n \iff \ker(\varphi) = \langle \vec{0} \rangle$ (第一章 定理6.1)

$\iff \varphi$ 是单射 ▨

(ii) 由命题1.1 直接得出

§1.3 线性同构

~~命题1.2~~ 定理1.1 设 $\dim V = n$, $\dim W = m$ 则 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构

特别地 $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn$

证: 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的基, $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的一组基.

设 $\Phi: \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow F^{m\times n}$

$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

其中 A_φ 是 φ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\dots \vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵

设 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$. 则

$$\left((\varphi_1+\varphi_2)(\vec{e}_1), \dots, (\varphi_1+\varphi_2)(\vec{e}_n)\right)$$

$$= (\varphi_1(\vec{e}_1)+\varphi_2(\vec{e}_1), \dots, \varphi_1(\vec{e}_n)+\varphi_2(\vec{e}_n))$$

$$= (\varphi_1(\vec{e}_1), \dots \varphi_1(\vec{e}_n)) + (\varphi_2(\vec{e}_1), \dots, \varphi_2(\vec{e}_n))$$

$$= (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m) A_{\varphi_1} + (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m) A_{\varphi_2}$$

$$= (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m)(A_{\varphi_1} + A_{\varphi_2})$$

于是 $\Phi(\varphi_1+\varphi_2) = \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$

类似地, 可验证: $\forall \alpha \in F$

$$\Phi(\alpha\varphi) = \alpha A_\varphi = \alpha \Phi(\varphi).$$

于是 Φ 是线性映射

设 $\varphi \in \ker(\Phi)$ 则 $A_\varphi = O_{m\times n}$

于是 $\forall i \in \{1,\dots n\}$ $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{0}_W$.

$\Rightarrow \varphi$ 是零映射 $\Rightarrow$ Φ 是单射 (第一章定理…)

设 $B \in F^{m\times n}$. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

定义: $\psi: V \longrightarrow W$

$$\vec{x} \longmapsto (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 $A_\psi = B$. 即 $\Phi(\psi) = B$. Φ 是满射

由第一章命题 8.1. Φ 是线性同构 ☒

~~定理~~

推论 1.1. 设 $\dim V = n$, $\dim W = m$

则 $\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = mn$

证: 由定理 1.1. $\mathrm{Hom}(V,W)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构

由第一章定理 8.2

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim F^{m\times n} = mn$$ ☒

§1.4 线性映射的复合

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$，$\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

则 $\psi\circ\varphi \in \mathrm{Hom}(U,W)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

定理1.2 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$. $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m$; $\vec{\delta}_1,\dots,\vec{\delta}_k$ 分别是 U, V, W 的基底. 设 A 是 φ 在 $\vec{e}_1\dots\vec{e}_n$, $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵，B 是 ψ 在 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$, $\vec{\delta}_1,\dots\vec{\delta}_k$ 下的矩阵. 则 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{k\times m}$

则 $\psi\circ\varphi$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$, $\vec{\delta}_1,\dots\vec{\delta}_k$ 下的矩阵是 BA

[注. 记 $\varphi=\varphi_A$，$\psi=\varphi_B$ 则 $\varphi_B\circ\varphi_A=\varphi_{BA}$]

证：利用坐标. 设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$

$\varphi(\vec{x}) = y_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+y_m\vec{\varepsilon}_m$

$\psi(\varphi(\vec{x})) = z_1\vec{\delta}_1+\dots+z_k\vec{\delta}_k$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_k\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_k\end{pmatrix} = (BA)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} \Rightarrow$$ BA 是 $\psi\circ\varphi$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$, $\vec{\delta}_1,\dots\vec{\delta}_k$ 下的矩阵 □

关于像集维数的几个不等式

设 $\varphi\in\mathrm{Hom}(U,V)$. $\psi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

定理1.3 (i) 设 Z 是 U 的子空间

则 $\dim Z \geq \dim(\varphi(Z))$

(ii) ~~设~~ 对任意的线性映射 φ. 用 I_φ 简记 $\mathrm{im}(\varphi)$. 则

$\dim(I_{\psi\circ\varphi}) \leq \min(\dim I_\varphi, \dim I_\psi)$.

证：(i) 设 $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_d$ 是 Z 的基. 则

$\varphi(Z)=\langle\varphi(\vec{v}_1),\dots\varphi(\vec{v}_d)\rangle$

于是 $\dim\varphi(Z)\leq d$.

(ii) [利用核] 设 $K_\varphi=\ker(\varphi)$

$K_\psi=\ker(\psi)$.

∵ $K_\varphi \subset K_{\psi\circ\varphi}$ ∴ $\dim K_\varphi \le \dim K_{\psi\circ\varphi}$

∵ $\dim K_\varphi + \dim I_\varphi = \dim K_{\psi\circ\varphi} + \dim I_{\psi\circ\varphi} = \dim V$

∴ $\dim I_{\psi\circ\varphi} \le \dim I_\varphi$

~~$I_{\psi\circ\varphi} \subset I_\varphi \Rightarrow \dim I_{\psi\circ\varphi} \le \dim I_\varphi$~~

$I_{\psi\circ\varphi} = \psi(I_\varphi)$

由(i) $\dim I_{\psi\circ\varphi} \le \dim I_\varphi$

注：(ii) 与 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{\cancel{k\times m}}$ 则

$\mathrm{rank}(\overset{BA}{\cancel{AB}}) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$

等价. (

例：设 $M\in F^{m\times n}$. 如果 $\mathrm{rank}(M)=m$ 则称M行满秩. 如果 $\mathrm{rank}(M)=n$, 则称M列满秩. 设 $A\in F^{m\times n}$. 证明：

$A=BC$.

其中 B是列满秩矩阵, C是行满秩矩阵.

证：(矩阵法) 设 $r=\mathrm{rank}(A)$. 由初等行和列变换可知. 存在 $P\in GL_m(F)$, $Q\in GL_n(F)$

使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q$.

$=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}_{m\times r}(E_r, 0)_{r\times n}Q$

设 $B=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}\in F^{m\times r}$ $\mathrm{rank}(B)=r$

$C=(E_r, 0)Q\in F^{r\times n}$ $\mathrm{rank}(C)=r$

$A=BC$ □

(映射法) 设 $\varphi_A: F^n \to F^m$ 则A是φ_A在F^n和F^m标准基下的矩阵

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

由线性映射分解定理

$$\begin{tikzcd} F^n \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\pi"'] & F^m \\ F^n/\ker(\varphi_A) \arrow[ur, "\overline{\varphi_A}"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi_A=\overline{\varphi_A}\circ\pi$ 其中π的满射, $\overline{\varphi_A}$是单射

设 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_s$ 是 $F^n/\ker(\varphi_A)$ 的一组基

π在 ~~$\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_s$~~. F^n的标准基 和 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_s$ 下的矩阵为 $C\in F^{s\times n}$. 因为π的满射

所以C行满秩 ($\mathrm{rank}(C)=\mathrm{rank}(\pi)=\dim I_\pi=s$)

设 $\overline{\varphi_A}$ 是 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_s$ 和 F^m 的标准基下的矩阵

$B\in F^{m\times s}$. 因为$\overline{\varphi_A}$单射, 所以B列满秩

由定理 1.2. $A=BC$. ☑

(由线性映射和商空间维数公式可直接得出 $s=r$)

§1.5 线性映射的标准型

定理 1.4. 设 $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$. 则存在 V 的基底 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$ 和 W 的基底 $\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_m'$ 使得 φ 在这两组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$

证: 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m$ 分别为 V 和 W 的基. φ 在这两组基下的矩阵是 $A\in F^{m\times n}$.

由初等行列变换可知. 存在 $P\in GL_m(F)$, $Q\in GL_n(F)$. 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$$

设 $(\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_m')=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_m)P^{-1}$

$(\vec{e}_1',\dots\vec{e}_n')=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)Q$

~~则~~ 由第一章定理 7.1 $\vec{e}_1',\dots,\vec{e}_n'$; $\vec{\varepsilon}_1',\dots,\vec{\varepsilon}_m'$ 是分别是 V, W 的基

则 φ 在这两组基下的矩阵是

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}.$$

注: 在定理 1.4 ~~的~~ 给出的基底下的 ~~矩阵坐标~~ 映射: 为 $\forall \vec{x}=x_1\vec{e}_1'+\dots+x_n\vec{e}_n'$. $\vec{y}=\varphi(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\Big\}m-r.$$

即总可以选出 V, 和 W 的基底 使得 φ 在该基底下是"投影"

§1.6 对偶映射

设 V^*, W^* 是 V, W 的对偶空间. $\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$