线性代数第十二次作业

2017 年 12 月 11 日–17 日

习题 1. 假设 $a_1, \cdots, a_n$ 不为零, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

习题 2. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$

习题 3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_m(\mathbb{R})$ 是非退化矩阵, C 是任意 $n \times m$ 矩阵. 利用矩阵分块乘法证明

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

习题 4. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i \neq j$ 有: $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$. 证明: $\det A \neq 0$.

习题 5. 在乘法幺半群 M 中选出任意一个元素 t,并引入一个新的运算 $*$:

$$x * y = xty.$$

证明: $(M, *)$ 是一个半群; $(M, *)$ 成为一个幺半群当且仅当所选的元素 t 是可逆的, 这时它的单位元是 t^{-1}.

习题 6. 证明集合 $\mathbb{Z}$ 关于运算 $\circ$ 构成一个交换幺半群, 这里 $\circ$ 如下定义: $n \circ m = n + m + nm = (1+n)(1+m) - 1$. 什么是 $(\mathbb{Z}, \circ)$ 的单位元? 找出 $(\mathbb{Z}, \circ)$ 的全部可逆元.

习题 7. 找出 $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/(6)$ 中的可逆元.