

线性代数作业

第十四次(12\25 - -12\31)

参考文献:《代数学引论》第一卷·柯斯特利金, 《基础代数》第一卷·席南华

习题1.

当 $n \geq 3$ 时, 证明置换群 S_n 中任意元素的阶都小于 $n!$, 即可得 S_n 不是循环群.

习题2.

如果环中的任意元素 x 满足方程 $x^2 = x$, 证明该环是交换环.

习题3.

环 R 的非零元素 x 称为幂零的, 若存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x^n = 0$. 证明:

- 1) 若 R 是任意有单位元的环, x 是幂零元, 则 $1 - x$ 是可逆元.
- 2) 环 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 包含有幂零元 $\Leftrightarrow m$ 可以被一个大于 1 的整数的平方整除.

习题4.

设域 F 的特征为 p , 证明对于任意的 $a, b \in F$ 和正整数 m , 有

$$(a + b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}.$$

习题5.

证明任意有限整环是一个域.