线性代数习题

第二周 (2017.9.18–24)

参考文献:《代数学引论》第一卷 • 柯斯特利金, 《基础代数》第一卷 • 席南华

习题 1. 验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

习题 2. 设 $f: X \to Y$ 是一个映射, 且 S, T 都是 X 的子集. 证明

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T), \quad f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T).$$

试举一例, 说明后一个式子中的包含关系一般来说不能换成相等关系.

习题 3. 集合 S 的全体子集的集合记作

$$\mathscr{P}(S) = \{T | T \subset S\}.$$

若 S 含有 n 个元素 ($n < \infty$), 则集合 $\mathscr{P}(S)$ 的基数是多少?

习题 4. 设 $f: X \to Y$ 是一个映射. 设 $b \in \operatorname{Im}(f) := \{f(a) | a \in X\}$, 称

$$f^{-1}(b) := \{x | f(x) = b\}$$

为元素 b 上的**纤维**. 证明集合 X 是互不相交的纤维的并(也就是说, 给出了 X 的一个划分).

习题 5. 符号 $S \triangle T$ 表示两个集合 S 与 T 的**对称差**: $S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. 证明:

$$S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T).$$

习题 6. 设 S 是无限集合 X 的有限子集, 证明: 存在从 $X \setminus S$ 到 X 的一一映射.