线性代数作业

第三周(9/25-10/1)

习题 1 定义$\mathbb{R}^2$上的二元关系$\preceq$如下：

$$(a,b)\preceq(c,d) \Leftrightarrow a \le c\text{并且}a+b \le c+d$$

证明：这个二元关系是$\mathbb{R}^2$上偏序但不是全序.

习题 2 设$\mathbb{N}$是自然数集合，定义$\mathbb{N}$上的二元关系$\mathbf{R}$：

$$\mathbf{R} = \{< x, y > | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x+y\text{是偶数}\}$$

(1) 证明这个关系$\mathbf{R}$是一个等价关系；
(2) 求关系$\mathbf{R}$的等价类；
(3) 试设计一个从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的函数f，使得由函数f诱导的等价关系就是关系$\mathbf{R}$.

习题 3 对$\mathbb{R}^2$中的元素，定义关系如下：$(a,b)\sim(c,d)$ 当且仅当$a-c$和$b-d$都是整数. 证明这个关系$\sim$是$\mathbb{R}^2$上的等价关系，且其商集可以几何地表示为环面*(*形如汽车轮胎*)*上的点集.

习题 4 设$\sigma \in S_n$（S_n表示有n个元素的集合到自身的置换全体）. 定义S_n中的二元关系如下：

$$\mathbf{R} = \{(\tau,\pi) \in S_n \times S_n | \text{存在整数}i\text{使得}\tau{=}\pi\sigma^i\}$$

证明：$\mathbf{R}$ 是S_n 的等价关系.

习题 5 计算置换的乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.