

线性代数习题

2017年10月16日-22日

习题 1. 设 U 和 V 是某线性空间 W 的两个线性子空间, 定义:

$$U + V := \{u + v | u \in U, v \in V\}.$$

- (1) 证明: $U + V$ 是 W 的子空间 (称作 U 与 V 的和).
- (2) 若 $U \cap V = \{0\}$, 则称 $U + V$ 为 U 与 V 的直和, 记作 $U \oplus V$. 证明: 对于给定的 $x \in W$, 若 $x \in U \oplus V$, 则存在唯一的 $u \in U, v \in V$ 使得 $x = u + v$.

习题 2. 设 V, V_1 和 V_2 都是 \mathbb{R}^n 的线性子空间, 并且 $V \subset V_1 + V_2$. 等式 $V = (V \cap V_1) + (V \cap V_2)$ 永远成立吗? 在 $V_1 \subset V$ 的特殊情况下, 这一关系成立吗?

习题 3. 设 U, W 是线性空间 V 的非零子空间, 且 $V = U \oplus W$, 则 W 叫作 U 在 V 中的一个补, 而 U 叫作 W 在 V 中的一个补.

- (1) U 在 V 中的补是唯一确定的吗?
- (2) 试比较 W 与集合意义上的补集 $V \setminus U$.

习题 4. 设 $U_i (i = 1, 2, \dots)$ 是某线性空间 W 的线性子空间. 证明: $\bigcap_i U_i$ 是 W 的子空间.

- 习题 5.** (1) 证明向量 $X_1 = (1, 2, 3), X_2 = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ 是线性无关的.
- (2) 记 $V = \langle X_1, X_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. 证明向量 $X = (-5, 2, 9)$ 属于 V , 并把 X 写为 X_1, X_2 的线性组合.
 - (3) 给出 V 在 \mathbb{R}^3 中的一个补.

习题 6. 令 $X_1 = (1, 2, 3), X_2 = (2, 1, 3), X_3 = (3, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. 证明: $\{X_1, X_2, X_3\}$ 是线性空间 \mathbb{R}^3 的一个极大线性无关组.