线性代数习题

2017 年 10 月 23 日–29 日

习题 1. 判断下列向量组的线性相关性, 并计算它们的秩:

(1) $X_1 = (4, -5, 2, 6)$, $X_2 = (2, -2, 1, 3)$, $X_2 = (6, -3, 3, 9)$.

(2) $X_1 = (4, -5, 2, 6)$, $X_2 = (2, -2, 1, 3)$, $X_2 = (5, -3, 3, 9)$, $X_2 = (4, -1, 5, 6)$.

习题 2. 求 λ 使得向量 $(7, -2, \lambda)$ 是 $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$, $(1, -6, 1)$ 的线性组合.

习题 3. 计算下列矩阵的秩:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} (x \text{ 是变量}), \quad \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 4. 证明: 齐性方程组的解构成一个线性空间. (思考: 根据系数矩阵的秩能否知道该空间的维数?)

习题 5. 类似于行变换, 我们可以对列进列变换, 即: 将某两列互换位置, 把某一列乘上某个非零的数, 把某一列乘上某个非零的数然后将其加到另外一列上去. 证明:

(1) 列变换不改变矩阵的秩.

(2) 可通过行变换及列变换将矩阵化为如下形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

这里 1 的个数等于原矩阵的秩, 空白的地方表示取为 0.