线性代数作业

第七次(10\30--11\5)

参考文献:《代数学引论》第一卷 • 柯斯特利金, 《基础代数》第一卷 • 席南华

习题1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基, $\beta_1,\cdots,\beta_m$, 是 W 的一组基, $\sigma\in \boldsymbol{Hom}(V,W)$, 且 σ 在基 $\left\{\alpha_i\right\}$ 和基 $\left\{\beta_j\right\}$ 下的矩阵为 A。又任意 α 在基 $\left\{\alpha_i\right\}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, 则 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\left\{\beta_j\right\}$ 下的坐标为 $A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

习题2. 证明: *1*, $x-1$, $(x-2)(x-1)$ 是 $\boldsymbol{P}[x]_2$ (次数不超过*2*的多项式全体)的一组基, 并求向量 $1+x+x^2$ 在这组基下的坐标.

习题3. 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中取一组基: $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$, 定义线性映射 σ:

$$\sigma(\alpha_1)=\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\sigma(\alpha_2)=\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\sigma(\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

*(1)*求 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A;

*(2)*求 $\boldsymbol{Ker}(\sigma)$, $\boldsymbol{Im}(\sigma)$ 以及它们的维数;

*(3)*向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基, 试求 σ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵 B, 并验证行列式等式 $\left|A\right|=\left|B\right|$ 成立.

习题4. 设 σ 为线性空间 V 到自身的线性映射(也称为线性变换), 且满足 $\sigma^2=\sigma$, 求证: $V=\boldsymbol{Ker}(\sigma)\oplus\boldsymbol{Im}(\sigma)$ (直和).