线性代数作业

第八次(11\6−−11\12)

参考文献:《代数学引论》第一卷 • 柯斯特利金, 《基础代数》第一卷 • 席南华

习题1. 定义映射 σ : $R^2 \mapsto R^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

*(1)*验证映射 σ 是线性映射;

*(2)*求 σ 在标准基下的矩阵 A ;

*(3)*求 $\boldsymbol{Ker}(\sigma)$, $\boldsymbol{Im}(\sigma)$ 以及它们的维数;

习题2. 对于任意的两个 $m \times n$ 的矩阵 A 和 B ,证明

$$\boldsymbol{Rank}\,(A+B) \leqslant \boldsymbol{Rank}(A) + \boldsymbol{Rank}(B).$$

习题3. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$,矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$,计算下乘积:

(1) $A \cdot B$;

(2) $B \cdot A$;

习题4. 利用数学归纳法证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab + mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题5. 我们称矩阵 $A = \left(a_{i,j}\right)_{n \times n}$ 的对角元素之和 $a_{11} + a_{22} + \cdot + a_{nn}$ 为矩阵 A 的迹,记作 $\boldsymbol{Trace}(A)$。设 A, B 为两个 $n \times n$ 阶矩阵,证明: $\boldsymbol{Trace}(AB) = \boldsymbol{Trace}(BA)$。