

线性代数第九次作业

2017年11月13日-19日

习题 1. 令

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1} 和 F^{-1} (写下求解过程).

习题 2. 设 A 是一个幂零方阵, 即, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $A^n = 0$. 问: $E \pm A$ 是否可逆? 若可逆, 求逆.

习题 3. 设 A 是一个方阵. 若 $A^T = A$, 则称 A 对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 则称 A 斜对称矩阵. 证明:

- (1) 若 A 可逆且对称, 则 A^{-1} 亦对称;
- (2) 若 A 可逆且斜对称, 则 A^{-1} 亦斜对称.

习题 4. (1) 验证

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(2) 如果 $ad - bc = 0$, A^{-1} 存在吗? 证明之.

习题 5. (1) 证明任意 2 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

满足关系式

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)E. \quad (\heartsuit)$$

(2) 如果 $ad - bc \neq 0$, 试运用关系 (\heartsuit) 求 A^{-1} .