中国科学院大学线性代数(下)第十四次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 柯斯特利金-第二卷 第81页: 4题(1),(2).

2. 设 $A \in M_n(F)$, 求矩阵空间 $M_n(F)$ 上的线性算子 $\phi_A(X) = AX$的极小多项式和特征多项式(其中 X为任一n阶矩阵)。

3. 设 V 是域 F上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性算子，$f, g \in F[t]$ 且$\gcd(f, g) = 1$。对于 $\vec{v} \in V$，若 $f(\mathcal{A})(\vec{v}) = g(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$，则 $\vec{v} = \vec{0}$。

4. 证明：对于复矩阵 $J_n(1)$，

   (1) 对任意 $n > 1$，$J_n(1)$不相似于 E_n；

   (2) 对任意正整数 k，$J_n(1)$相似于$J_n(1)^k$。

5. 设 V 是复数域上的有限维线性空间， $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 V 上的线性算子。若 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$，则 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 有公共的特征向量。

6. 设 V 是域 F上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性算子。证明：若 V 的某个循环子空间可以分解成两个 $\mathcal{A}$-子空间的直和，则这两个 $\mathcal{A}$-子空间也是循环子空间。