中国科学院大学线性代数(下)第十五次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 席南华第二册: p83. 5(1)(2).
   （提示：5（1）矩阵的特征多项式为 $(t-3)^2(t+1)$，5（2）矩阵的特征多项式为 $(t-1)^3$。）

2. (a) 对 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 求$J_4(0)^k$的Jordan标准型.

   (b) 证明：对 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得$J_n(0)^k$的Jordan标准型为由 $(ik+k-n)$个 $J_i(0)$和 $(n-ik)$个 $J_{i+1}(0)$ 组成的分块对角阵。

   (c) 对 $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, 求证: 矩阵方程$X^k = J_n(0)$在无解.

3. 设$A, C \in M_m(\mathbb{C})$, $B, D \in M_n(\mathbb{C})$,

   令$U(A,B) = \{X \in \mathbb{C}^{m\times n} : AX = XB\}$为一个复线性空间.

   求证:

   (a) 若$A \sim_s C, B \sim_s D$, 构造一个$U(A,B)$到$U(C,D)$的线性同构.

   (b) $\forall f \in \mathbb{C}[t]$, $U(A,B)$是$U(f(A), f(B))$的子空间.

   (c) 若$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing$, 则$U(A,B) = \{0\}$.

   (d) 若$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(-B) = \varnothing$, 且$A^2 = B^2$ (此时设$m = n$), 则$A = B$.

   (e) （选做）$\mathrm{dim} U(J_m(\lambda), J_n(\mu)) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu, \\ \min\{m,n\}, & \lambda = \mu. \end{cases}$.

   (f) （选做）设$\{p_1, ..., p_s\}$为A的初等因子组, $\{q_1, ..., q_t\}$为B的初等因子组. 则

   $$\mathrm{dim} U(A,B) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \deg \gcd(p_i, q_j)$$