中国科学院大学线性代数 (下) 第十七次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 给 $\mathbb{R}^4$ 带上标准内积成为欧式空间, 令 $v = (1, 5, -8, -1)^t$. 请用正交化方法求出 $\langle v \rangle^{\perp}$ 的一组标准正交基.

2. 席南华第二册, p97,98: 3, 7, 10.

3. 给 $\mathbb{R}^n$ 带上标准内积成为欧式空间. 取单位向量 $v \in \mathbb{R}^n$ (即 $||v||^2 = v^t v = 1$).

   令 $H_v = E - 2vv^t \in M_n(\mathbb{R})$, 此矩阵被称为镜面反射或 Householder 变换.

   求证:

   (a) $H_v^t H_v = E, H_v^t = H_v, H_v^2 = E$. 特别地, H_v 是正交矩阵.

   (b) H_v 有特征子空间 $V^{-1} = \langle v \rangle$, $V^1 = \langle v \rangle^{\perp}$. 进而 $\det(H_v) = -1$.

   (此问告诉我们, H_v 为什么被称作镜面反射.)

   (c) (选做) 对任何 $A \in O_n(\mathbb{R})$, 存在有限个单位向量 $v_1, v_2, \cdots, v_s \in \mathbb{R}^n$ (不必两两不同) 使得 $A = H_{v_1} H_{v_2} \cdot \cdots \cdot H_{v_s}$.

   (即正交群由镜面反射生成.)