中国科学院大学线性代数 (下) 第十八次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 对下列实对称方阵 A, 求正交矩阵 P, 使得 P^tAP 是对角形.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_A(t) = (t-1)(t-4)(t+2)$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \chi_A(t) = (t-1)^2(t-10)$

2. 设实矩阵 A, B 是正交矩阵, 且满足 $\det(A) + \det(B) = 0$. 求证 $A + B$ 不可逆.

3. 设 A 为实对称矩阵. $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 为 A 的特征值.

   求证:

   (a)
   $$\frac{(Ax,x)}{(x,x)} \leq \lambda_n,\ x \neq 0,$$
   且取等当且仅当 $x \in V^{\lambda_n} \setminus \{0\}$.

   (b) (选做)
   $$\lambda_k = \min_{\dim U_k = k} \left(\max_{x \in U_k \setminus \{0\}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \right)$$
   其中最小值对所有 k 维子空间 U_k 取.

4. 定义矩阵指数
   $$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$
   可以证明, 对任何复矩阵 A, 上式右边的极限总是存在的, 于是矩阵指数是良定义的. (你无须证明良定义, 下面的计算中也无须考虑任何收敛性问题.)

   证明:

   (a) 若 $A \sim_s B$, 则 $e^A \sim_s e^B$.

   (b) 设 $\theta \in \mathbb{R}$, 令 $K_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$. 则 $e^{K_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   (c) 若 A 是实正交矩阵, 且 $\det(A) = 1$. 则存在反对称矩阵 K, 使得 $e^K = A$.