中国科学院大学线性代数 (下) 第四次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 张秉宇

注记 1. *所有的域 F 都假设为特征 0.*

1. 在线性空间 F^3 中, 求由下述基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ 的转换矩阵. 并求向量 α 在两组基下的坐标.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = (1,0,-1), \varepsilon_2 = (2,1,1), \varepsilon_3 = (1,1,1) \\ &\eta_1 = (0,1,1), \eta_2 = (-1,1,0), \eta_3 = (1,2,1) \\ &\alpha = (1,0,0) \end{aligned}$$

2. 设 P_n 是次数小于 n 的多项式组成的向量空间. 求从基 $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ 到基 $\{1, x-a, ..., (x-a)^{n-1}\}$ 的转换矩阵. 其中 $a \in F$.

3. 证明: 三个变量的 n 次齐次多项式的线性空间和 $n+1$ 阶对称矩阵的线性空间同构.

4. 分别在下列情形中, 证明存在直和 $V = U_1 \oplus U_2$. 并计算投影变换 P_1, P_2.

$$a)V = F^n, U_1 = \{x : x_1 + ... + x_n = 0\}, U_2 = \{x : x_1 = ... = x_n\}$$
$$b)V = M_n(F), U_1 = \{A : A\text{是对称矩阵}\}, U_2 = \{A : A\text{是反对称矩阵}\}$$

5. 假设存在一列有限维线性空间与线性映射,

$$0 \xrightarrow{\phi_0} V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} ... \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\phi_n} 0$$

其中 $\phi_0 = \phi_n = 0$, 满足 $\ker\phi_i = \mathrm{im}\phi_{i-1}, i = 1, 2, ..., n$, 求证 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$