

# 中国科学院大学线性代数 (下) 第七次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 张秉宇

1. 设  $V$  是  $F$  上的有限维线性空间,  $f \in \mathcal{L}_2(V, F)$ . 令  $\varphi : V \rightarrow V^*, v \mapsto f_v$ , 其中  $f_v(x) = f(x, v)$ . 证明

1)  $\varphi$  是线性映射.

2)  $\dim_F \text{Im}(\varphi) = \text{rk}(f)$

3)  $\varphi$  是线性同构  $\iff \text{rk}(f) = \dim_F V$

2. 设  $q(x) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$  是  $\mathbb{R}^3$  上的二次型, 求其秩, 正、负惯性指数, 符号差.

3. 实矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $P$  可逆, 使得  $P^tAP$  是标准型 (即形如  $\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & -E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的矩阵)

4. 已知合同关系是  $M_n(\mathbb{R})$  上的等价关系, 试问这个关系有多少个等价类?

5. 设  $q$  是  $\mathbb{R}^n$  上的二次型, 且存在  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $q(x) > 0, q(y) < 0$ . 试证存在  $z \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $q(z) = 0$

6. 用 Jacobi 方法 (Jacobi 定理), 求下列二次型的规范型.

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$