

中国科学院大学线性代数 (下) 第八次作业题  
主讲老师: 李子明  
助教: 杜昊, 张秉宇

---

1. 柯斯特利金第二册: p42, 2, 3.
2. 设  $A$  是正定矩阵. 求证  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \forall k \in \mathbb{Z}, \lambda A^k$  正定.
3. 设  $A$  是实对称矩阵. 则

a) 存在正实数  $t > 0$ , 使得  $tE \pm A$  正定.

b) 存在正实数  $C > 0$ , 使得  $|x^t Ax| \leq Cx^t x$ .

4. 证明

$$f(x) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

是半正定二次型.

5. a) 证明  $q(A) = \text{tr}(A^t A)$  是  $M_n(\mathbb{R})$  上的正定二次型.  
b) 若  $AA^t = A^2$ . 求证  $A$  是对称矩阵. (提示: 考虑  $q(A - A^t)$ ).