

作业

1. (1) 矩阵表示:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2①+②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-①+③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③ \leftrightarrow ②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2②+③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

得到一个阶梯形系数矩阵 $\Rightarrow$ 方程组有解 (即相容).

且非0阶梯形方程个数 = 未知数 (x, y, z) 个数 = 3

$\therefore$ 该方程组是确定.

(2) 矩阵表示:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{① \leftrightarrow ③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2①+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0=1 \text{ 则方程组不相容.}$$

(3) 矩阵表示:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3①+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-①+③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2③+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③ \leftrightarrow ②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 得到阶梯形系数矩阵 } \Rightarrow \text{方程组相容.}$$

且非0阶梯形方程个数 = 2 < 未知数个数 = 3. $\therefore$ 方程不确定.

2. 数学归纳法证明 1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

证明: 1) $n=1$ 时 $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow$ 等式成立.

假设该等式对 $n-1$ 时成立, 即 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 则

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2). $n=1$ 时 $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow$ 等式成立.

假设等式在 $n-1$ 时成立 即 $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \therefore \text{等式成立.} \quad \square. \end{aligned}$$

3. 证明: 若 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$ 的解.

则 $\forall c \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ \vdots \\ c\alpha_n \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$ 也是该方程组的解.

证明: 若 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是方程组 (*) 的解 则 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = 0$ 对 $i=1, 2, \dots, m$ 均成立.

则 $c \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) = 0$ 对 $\forall c \in \mathbb{R}$ 成立 ($0 \cdot c = 0$) 由乘法对加法分配律可知

$\sum_{j=1}^n a_{ij} (c\alpha_j) = 0$ 对 $\forall c \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, m$ 成立. $\therefore \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ \vdots \\ c\alpha_n \end{pmatrix}$ 满足方程组 (*) 也是一组解.

类似地, 若 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 是方程组 (*) 的两个解. 则

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = 0 \quad (\forall i=1, 2, \dots, m)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha_j + \beta_j) = 0 \quad \text{对 } i=1, \dots, m \text{ 成立}$$

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$ 也构成方程组 (*) 的一组解. $\square$

数学归纳法

数学归纳法和反证法是数学证明中两种较常用方法。

很多涉及自然数、命题都可以利用数学归纳法证明。

数学归纳法的基础是：任何自然数、非空集合一定有最小元（Peano公理）

第一数学归纳法：

证明一个与自然数 n 有关、命题 $P(n)$ 若 $P(n)$ 满足如下条件：

- 1) 当 $n = n_0$ 时 命题 $P(n_0)$ 成立（一般取 $n_0 = 0$ 或 1 ） $\leftarrow$ induction base (初始情形)
- 2) 假设 $n = k$ ($k \geq n_0$ 且 $k \in \mathbb{N}$) 时 命题 $P(k)$ 成立 $\leftarrow$ induction hypothesis (归纳假设)
- 3) 证明 $n = k+1$ 时 命题 $P(k+1)$ 成立。

则 命题 $P(n)$ 对所有 $n \geq n_0$ 均成立。

第二数学归纳法（完全数学归纳法）

- 1) 证明 $P(1)$ 成立。
- 2) 假设对 $\forall m \in \mathbb{N}$ 有 $P(k)$ 对所有 $k \leq m$ 均成立。
- 3) 证明 $P(m+1)$ 成立。

则 $P(n)$ 对所有自然数 $n \in \mathbb{Z}^+$ 均成立。

证明第一(第二)数学归纳法“正确性”：(以第一为例证明且取 $n_0 = 1$)

(反证法) 假设数学归纳法不对。即 $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ st. 命题 $P(n)$ 不成立。

定义集合 $S = \{s \in \mathbb{Z}^+ \mid P(s) \text{ 不成立} \}$ 则由假设可知 $S \neq \emptyset$ 。

由 Peano 公理 集合 S 中有最小元 设为 s_0 。则 $s_0 \in \mathbb{Z}^+$ 且 $s_0 \neq 1$ ($\because P(1)$ 成立)。

$\therefore s_0 > 1$ 由于 s_0 是使得 $P(s)$ 不成立一最小元。 $\therefore P(s_0 - 1)$ 成立。由归纳法

过程可知 $P(s_0)$ 成立。矛盾。 $\therefore S = \emptyset$ 即 $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ 成立。 $\square$

二项式定理.

1. 排列与组合 (回忆)

有 n 个小球 分别标号 $1, 2, \dots, n$.

1) 取出 r 个 ($r \leq n$), 并排成一行^{按一定顺序} 得到不同排列方式一个数称为排列数

$$\text{记为 } A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

2) 取出 r 个 ($r \leq n$) 小球 不计顺序 得到不同组合方式一个数称为组合数

$$\text{记为 } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

定义 $\binom{n}{r} := \frac{n!}{r! (n-r)!}$ 特别地, 规定 $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{r} = 0$ ($r < 0$ 或 $r > n$).

基本性质: 1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (大家自己找一下组合意义, 并用数学归纳法验证之)

$$2) \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \quad (\text{班长定理}).$$

$$3) \binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{r-k} \cdot \binom{n-r+k}{k} \quad (k \leq r \leq n).$$

2. 二项式定理.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

证明: 组合上看: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n \text{ 个相乘}}$ 相当于每个括号中要么选 a , 要么选 b 拿出来乘在一起.

$\therefore a^i b^{n-i}$ 系数相当于从 n 个括号中选出 i 个拿 a (自然地剩下 $n-i$ 个

拿 b 即可) $\checkmark$ 由组合数定义可知 $a^i b^{n-i}$ 系数为 $\binom{n}{i}$ ($i=0, 1, \dots, n$).

(数学归纳法) $n=1$ 时 $a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a$ 等式成立.

假设等式对 $n-1$ 成立. 则 $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} (a+b) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-1-i} \right) (a+b)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{i+1} b^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i}$$

其中 ① = $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{i+1} b^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} a^{i+1} b^{n-(i+1)} + a^n$

作变量替换 $j=i+1$ 则 ① = $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} a^j b^{n-j} + a^n$

② = $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i} + b^n \stackrel{j=i}{=} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^j b^{n-j} + b^n$

则 原式 $(a+b)^n = ① + ② = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} a^j b^{n-j} + a^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^j b^{n-j} + b^n$
 $= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right) a^j b^{n-j} + a^n + b^n$ (由班长定理)

$= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} + a^n + b^n$

$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \stackrel{j=0}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

$\therefore$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ $\square$.

推论 (1) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ (2) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

回顾：整数 ~ 带余除法

设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0$ 则存在唯一一组整数对 (q, r) 使

$a = q \cdot b + r$ 其中 $0 \leq r < |b|$

PF. 不妨设 $b > 0$ ($b < 0$ 时证明类似)

令 $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示不超过 $\cdot$ 的最大整数

则 $q \leq \frac{a}{b} < q+1 \Rightarrow bq \leq a < b(q+1) \therefore 0 \leq a - bq < b$ 令 $r = a - bq$

则 q, r 满足题设.

且 $r' \neq r, q' \neq q$

设 (q', r') 是另一组满足题设的数对 $\forall |b| a = qb + r = q'b + r'$

$\therefore (q - q')b = r' - r \therefore |b| \cdot |q - q'| = |r' - r| \therefore |r'| < b, |r| < b$

$\therefore |r' - r| < b$ 而 $|b| \cdot |q - q'| \geq b \therefore$ 矛盾. 即 (q, r) 存在唯一.

例：费马小定理. (下节深证明. 尝试用数论归纳法证之)

对素数 p , $n^p \equiv n \pmod{p}$ 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 成立.

集合 $\rightarrow$ 映射.

映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足 $\forall x \in X \exists! y \in Y$ s.t. $f(x) = y$.
 $\downarrow$ $\downarrow$
 (定义域) (值域)
 原像集

像集: $\text{im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)\} \subseteq Y$.

逆像: 设 $y \in Y$ $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

设 $V \subseteq Y$ 子集 $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$.

单射: $\forall x_1, x_2 \in X$ 若满足 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 则称 f 为单射.

满射: 如果 $\text{im}(f) = Y$ 则称 f 为满射.

双射 (一一映射, 一一对应): f 既是单射, 又是满射.

例 1. 证明 (1) 设映射 $f: X \rightarrow Y$. $U \subseteq X$ 为子集.

求证 $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

(2) f 是单射 当且仅当 对 $\forall$ 子集 $U \subseteq X$ 满足 $f^{-1}(f(U)) = U$.

证 (1). $\forall x \in U$. 令 $y = f(x)$ 则 $y \in f(U)$ 且由逆像定义 $x \in f^{-1}(y)$

$\therefore x \in f^{-1}(f(U)) \Rightarrow U \subseteq f^{-1}(f(U))$

(2) (1) $\Rightarrow$ 对任意子集 $U \subseteq X$. 由 (1) 知 $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ 下面证反包含关系.

$\forall x \in f^{-1}(f(U))$ 即 $\exists y \in f(U)$ s.t. $f(x) = y$

$\because y \in f(U) \therefore \exists x' \in U$ s.t. $y = f(x')$ 又 $\because f$ 为单射 $\therefore x = x' \in U$.

(2) $\Leftarrow$, 假设 $\exists x_1, x_2 \in X$ s.t. $f(x_1) = f(x_2)$ 但 $x_1 \neq x_2$.

令 $U = \{x_1\}$ 则 $f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(f(x_1)) \because f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore x_1, x_2 \in f^{-1}(f(x_1)) \Rightarrow f^{-1}(f(U)) \supseteq \{x_1, x_2\} \neq \{x_1\} = U$.

矛盾 $\therefore \forall x_1, x_2 \in X$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 即 f 为单射 $\ast$