第十一次作业.

1. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 设 $A+B$, $A-B$ 均可逆. 证明 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

Pf. 方法一: $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{-(ii)+(i)} \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$ (初等变换不改变 rank)

$2n \geq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}(A-B) + \mathrm{rank}(A+B) = 2n$

$\therefore \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = 2n \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆. $\square$

方法二: 由习题课10. 例3 $\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A-B)^{-1} & -(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} \\ 0 & (A+B)^{-1} \end{pmatrix}$

且 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} E & \\ -E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A-B)^{-1} & -(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} \\ & (A+B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \\ E & E \end{pmatrix}$

$\therefore$ 可逆.

方法三: $\begin{pmatrix} A & B & E & 0 \\ B & A & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} A+B & A+B & E & E \\ B & A & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{(A+B)^{-1}\cdot(1)} \begin{pmatrix} E & E & (A+B)^{-1} & (A+B)^{-1} \\ B & A & 0 & E \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-B\cdot(1)+(2)} \begin{pmatrix} E & E & (A+B)^{-1} & (A+B)^{-1} \\ 0 & A-B & -B(A+B)^{-1} & E-B(A+B)^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(A-B)^{-1}\cdot(2)} \begin{pmatrix} E & E & (A+B)^{-1} & (A+B)^{-1} \\ 0 & E & -(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} & (A-B)^{-1}-(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-(2)+(1)} \begin{pmatrix} E & 0 & (A-B)^{-1}B(A+B)^{-1}+(A+B)^{-1} & (A-B)^{-1}B(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}+(A+B)^{-1} \\ 0 & E & -(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} & (A-B)^{-1}-(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{= \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1}}$$

(自行验证上述方法2,3中求出的逆相等).

方法四: $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{vmatrix} = |A-B|\cdot|A+B| \neq 0 \Rightarrow$ 可逆. $\square$

2. $$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&3&4\\1&3&5&9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&1&2&3\\0&2&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&0&-2\\1&2&3\\2&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&0&0\\1&2&2\\2&4&6\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\4&6\end{vmatrix} = -8.$$

3. $$\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&n&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&1&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{\sum_{i=1}^{n}(i)} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&3&\cdots&n&1\\\vdots&&&\vdots&\vdots\\n&1&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{列}\\ i=1,2\cdots n-1}]{-[i]+[i+1]} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\2&1&\cdots&1&1-n\\3&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\n&1-n&\cdots&&1\end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1-n\\1&\cdots&1-n&1\\\vdots&&&\vdots\\1-n&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{(n-1)} \xrightarrow[\text{行}]{\sum_{i=1}^{n-1}(i)} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&\cdots&-1&-1\\1&\cdots&1-n&1\\\vdots&&&\vdots\\1-n&\cdots&1&1\end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3\cdots n-1]{(1)+(i)} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&\cdots&-1&-1\\0&\cdots&-n&0\\&&&\\-n&&&\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1)\cdot(-n)^{n-2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}$$

4. $$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&n+1\end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{i=1,2\cdots n\\ \text{行}}]{-(i)+(i+1)} \begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\&&\ddots&\\&&&n\end{vmatrix} = n!$$

5. $$\begin{vmatrix}1&7&9&8\\2&1&3&9\\3&2&5&5\\4&8&6&7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1798&7&9&8\\2139&1&3&9\\3255&2&5&5\\4867&8&6&7\end{vmatrix} = 31\cdot\begin{vmatrix}x_1&7&9&8\\x_2&1&3&9\\x_3&2&5&5\\x_4&8&6&7\end{vmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$$

→ 行列式为整数

$\therefore 31 \mid$ 该行列式. $\square$

6. $$D_n = \begin{vmatrix}\lambda_1&1&&&&\\-1&\lambda_2&1&&&\\&-1&\lambda_3&1&&\\&&&\ddots&&\\&&-1&\lambda_{n-2}&1&0\\&&&-1&\lambda_{n-1}&1\\&&&&-1&\lambda_n\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第}n\text{列展开}} \lambda_n D_{n-1} - \begin{vmatrix}\lambda_1&1&&\\-1&\lambda_2&1&\\&&\ddots&\\&&-1\ \lambda_{n-2}&1\\&&&-1\end{vmatrix}$$

$$= \lambda_n D_{n-1} + \begin{vmatrix}\lambda_1&1&&\\-1&\lambda_2&1&\\&&\ddots&\\&&-1&\lambda_{n-2}\end{vmatrix} = \lambda_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

如果 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ 则 D_n 满足递推关系 $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ (Fibonacci 数列).

且 $D_1 = 1$ $D_2 = \begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix} = 2$ $\cdots$ 由 P_{73} 公式: $D_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

注意: $$D_n(1) = \begin{vmatrix}1&1&&\\-1&1&1&\\&&\ddots&\\&&-1&1\end{vmatrix} = (-1)^n\begin{vmatrix}-1&-1&&\\1&-1&-1&\\&&\ddots&\\&&1&-1\end{vmatrix} = (-1)^n\begin{vmatrix}-1&1&&\\-1&-1&1&\\&&\ddots&\\&&-1&-1\end{vmatrix} \overset{(\text{转置})}{=} (-1)^n D_n(-1).$$

行列式计算与应用.

§1 特殊矩阵行列式.

1. 三角阵,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ O & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ O & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & O & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & a_{1n} \\ & ⋰ & \vdots \\ & * & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & ⋰ & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

2. 分块准三角阵

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\cdot|C|.$$

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$
$C \in M_n(\mathbb{R})$
$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ or $\mathbb{R}^{n\times m}$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & A \\ C & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A|\cdot|C|$$

3. Vandermonde 行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

§2 计算行列式基本方法.

1) 初等变换成三角阵.

2) 按行(列)展开

3) 利用线性性质拆行(列): $\left|\vec{A}^{(1)} \cdots \alpha\vec{A}^{(i)}+\beta\vec{A}^{(i)'} \cdots \vec{A}^{(n)}\right| = \alpha\left|\vec{A}^{(1)} \cdots \vec{A}^{(i)} \cdots \vec{A}^{(n)}\right| + \beta\left|\vec{A}^{(1)} \cdots \vec{A}^{(i)'} \cdots \vec{A}^{(n)}\right|$

4) 建立递推关系 或利用数学归纳 (n阶)

5) 加边法 (补上周 P6 eg3).

6) 利用乘法定理: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$. (例 李老师讲义 12 — P6 两个例题)

Binet - Cauchy 公式（比内-柯西定理 柯 P109.6）

回忆：（r阶子式）

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$　$i_1, \cdots i_r \in \{1, \cdots m\}$，$j_1 \cdots j_r \in \{1, \cdots n\}$　$(r \le \min(m,n))$

称行列式：$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}$ 为 A 的一个 r 阶子式．记为 $M_A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix}$ ←行 ←列．

（即将 A 的 $i_1, \cdots i_r$ 行，$j_1, \cdots j_r$ 列交叉元素组成方阵）

Thm 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 则：

$$|A\cdot B| = \begin{cases} 0 & (n>m) \\ |A|\cdot|B| & (n=m) \\ \sum\limits_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n\le m} M_A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}\cdot M_B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix} & (n<m) \end{cases}$$

Pf. 设 $A = (a_{ij})_{n\times m}$，$B = \begin{pmatrix} \vec{B}_1 \\ \vdots \\ \vec{B}_m \end{pmatrix}$ 则 $|A\cdot B| = \begin{vmatrix} \sum_{j_1=1}^m a_{1j_1}\vec{B}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^m a_{nj_n}\vec{B}_{j_n} \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{\text{行列式线性性}}}_{\text{按第1行打开}}$

$$\sum_{j_1=1}^m a_{1j_1}\begin{vmatrix} \vec{B}_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^m a_{2j_2}\vec{B}_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^m a_{nj_n}\vec{B}_{j_n} \end{vmatrix} = \cdots = \sum_{j_1=1}^m a_{1j_1}\cdots\sum_{j_n=1}^m a_{nj_n}\begin{vmatrix} \vec{B}_{j_1} \\ \vdots \\ \vec{B}_{j_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{1\le j_1,\cdots j_n\le m} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\begin{vmatrix} \vec{B}_{j_1} \\ \vdots \\ \vec{B}_{j_n} \end{vmatrix}$$

注意到：如果 $j_1 \cdots j_n$ 有2个相等 则 行列式 $\begin{vmatrix} \vec{B}_{j_1} \\ \vdots \\ \vec{B}_{j_n} \end{vmatrix} = 0$ ∴ 若 $m<n$ 则 $|A\cdot B| = 0$

$$= \sum_{\substack{1\le j_1,\cdots j_n\le m \\ \text{两两不同}}} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\cdot M_B\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix}$$

设将 $j_1, \cdots j_n$ 按大小顺序排列为：$k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ 则

$$= \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n\le m}\ \sum_{\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \cdots & k_n \\ j_1 & j_2 \cdots & j_n \end{pmatrix}} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\ M_B\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix}$$

设将 $[j_1 \cdots j_n]$ 经过 s 次对换可得到标准排列 $[k_1 \cdots k_n]$ 且 $(-1)^s = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_n \\ j_1 \cdots j_n \end{pmatrix}$ ←置换符号．

则 $M_B\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix} = (-1)^s M_B\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix}$

$$\text{则 } |A\cdot B| = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le m}\Bigg[\underbrace{\sum_{\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_n \\ j_1 \cdots j_n \end{pmatrix}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_n \\ j_1 \cdots j_n \end{pmatrix}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}}_{=\,M_A\begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ k_1 \cdots k_n \end{pmatrix}}\Bigg]\cdot M_B\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix}$$

□.

§3 行列式应用.

1. 判断矩阵可逆，求逆矩阵. $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$

1) 判断：A 可逆 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

A 不可逆 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A < n \Leftrightarrow |A| = 0$

2) 求逆：<u>Def</u> 伴随矩阵：

$$A^{\vee} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{代数余子式}}{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \underset{\text{子式}}{M_{ij}}$$

$$M_{ij} = \det(A \text{去掉} {}^{i\text{行}}_{j\text{列}})$$

$$A \cdot A^{\vee} = |A| \cdot E_n = A^{\vee} \cdot A \qquad \therefore A \text{可逆} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{A^{\vee}}{|A|}$$

注：$|A^{\vee}| = |A|^{n-1}$

$$\mathrm{rank}(A^{\vee}) = \begin{cases} n & (\mathrm{rank}A = n) \\ 1 & (\mathrm{rank}A = n-1) \\ 0 & (\mathrm{rank}A \leq n-2) \end{cases}$$

(本周作业 P108.2)

2. 求非齐次线性方程组的解. $A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad (A \in M_n(\mathbb{R}),\ \vec{b} \in \mathbb{R}^n)$

$$A^{\vee} \cdot A\vec{x} = |A| \cdot E_n \vec{x} = \begin{pmatrix} |A| \cdot x_1 \\ \vdots \\ |A| \cdot x_n \end{pmatrix} = A^{\vee} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{i1} \cdot b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \cancel{b_i} A_{in} \cdot b_i \end{pmatrix}$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i$ 相当于 矩阵 ~~det~~ $(\vec{A}^{(1)} \cdots \vec{A}^{(j-1)}\ \underset{\uparrow \vec{A}^{(j)}}{\vec{b}}\ \vec{A}^{(j+1)} \cdots \vec{A}^{(n)})$

按 $\vec{b}$(第 j 列) 展开求行列式的结果.

$$\therefore |A| \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i = \det(\vec{A}^{(1)} \cdots \vec{A}^{(j-1)}\ \vec{b}\ \vec{A}^{(j+1)} \cdots \vec{A}^{(n)}).$$

—— Cramer 法则 ✗

3. 矩阵秩与行列式关系. $\forall\ A \in$ ~~$M_n(\mathbb{R})$~~ $\mathbb{R}^{m\times n}$

任意 r 行 r 列交叉处元素组成的方阵.

$\mathrm{rank}A = r \Leftrightarrow A\ \exists$ r阶子式 $\neq 0$ 且 所有 $r+1$ 阶子式 $= 0$

$\overset{\text{加边子式}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ r阶子式 $\neq 0$ 且 所有加边子式 $= 0$

eg 1. 证明 (1) $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$ (2) $(A^t)^\vee = (A^\vee)^t$ (3) $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$ (4) $(A^\vee)^\vee = |A|^{n-2}\cdot A$. $(n\geq 2)$

Pf (1) 设 $C = A\cdot B = (c_{ij})_{n\times n}$ $\quad c_{ij} = \vec{A}_i\cdot \vec{B}^{(j)}$ $\quad C^\vee = (C_{ji})_{n\times n}$

其中

$$C_{ji} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} \vec{A}_1\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_1\vec{B}^{(i-1)} & \vec{A}_1\vec{B}^{(i+1)} & \cdots & \vec{A}_1\vec{B}^{(n)} \\ \vdots & & & & & \\ \vec{A}_{j-1}\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_{j-1}\vec{B}^{(i-1)} & \vec{A}_{j-1}\vec{B}^{(i+1)} & \cdots & \vec{A}_{j-1}\vec{B}^{(n)} \\ \vec{A}_{j+1}\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_{j+1}\vec{B}^{(i-1)} & \vec{A}_{j+1}\vec{B}^{(i+1)} & \cdots & \vec{A}_{j+1}\vec{B}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{A}_n\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_n\vec{B}^{(i-1)} & A_n\vec{B}^{(i+1)} & \cdots & \vec{A}_n\vec{B}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j}\left|\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{j-1} \\ \vec{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix}_{(n-1)\times n}\cdot \left(\vec{B}^{(1)} \cdots \vec{B}^{(i-1)}\ \vec{B}^{(i+1)} \cdots \vec{B}^{(n)}\right)_{n\times(n-1)}\right|$$

$$(\text{Binet-Cauchy 公式}) = (-1)^{i+j}\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}\leq n} M_A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1}\end{pmatrix}\cdot M_B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-1} \\ 1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n} \cancel{A_{jk}}\cdot\cancel{B_{ki}}\ M_{jk}(A)\cdot M_{ki}(B)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{j+k}\cdot M_{jk}(A)\right]\cdot\left[(-1)^{i+k}\cdot M_{ki}(B)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\cdot B_{ki}$$

$$\therefore\ B^\vee\cdot A^\vee = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ki}\cdot A_{jk}\right)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}} = (C_{ji}) = C^\vee$$

(2) 令 $B = A^t$ 则 代数余子式 $B_{ij} = A_{ji}$ $\quad B^\vee = (B_{ji}) = (B_{ij})^t = (A_{ji})^t = (A^\vee)^t$

(3). 令 $B = \lambda A$ 则 $B_{ij} = \lambda^{n-1}A_{ij}$ $\quad B^\vee = (B_{ji}) = \lambda^{n-1}(A_{ji}) = \lambda^{n-1}A^\vee$

(4) $n=2$ 时 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ $\quad A^\vee = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$ $\quad (A^\vee)^\vee = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = A$ 成立.

$n\geq 3$ 时. 若 $|A| = 0$ $\quad \text{rank}(A^\vee)\leq 1 < n-1 \Rightarrow \text{rank}((A^\vee)^\vee) = 0 \Rightarrow (A^\vee)^\vee = O = 0\cdot A$

若 $|A|\neq 0$ $\quad (A^\vee)^\vee = (|A|\cdot A^{-1})^\vee \overset{(3)}{=} |A|^{n-1}(A^{-1})^\vee$ $\quad$ 且 $(A^{-1})^\vee\cdot A^\vee = (A\cdot A^{-1})^\vee = E^\vee = E$

$\therefore (A^{-1})^\vee = (A^\vee)^{-1} = (|A|\cdot A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}\cdot A$ $\quad \therefore (A^\vee)^\vee = |A|^{n-2}\cdot A$ $\quad \square$.