作业.

1. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

① $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ 且 ② $f$ 满 $\Leftrightarrow \forall V \subseteq Y$ $f(f^{-1}(V)) = V$.

2. 证明：$\forall$ $y \in f(f^{-1}(V))$ 即 $\exists$ $x \in f^{-1}(V)$ s.t. $y = f(x)$

$\because$ $x \in f^{-1}(V)$ $\therefore$ $\exists$ $y' \in V$ s.t. $f(x) = y'$

又 $\because$ $f$ 为映射，即 $f(x) = y = y'$ $\therefore$ $y \in V$. $\therefore$ $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$.

$f$ 是满射 $\Leftrightarrow$ $\forall$ $V \subseteq Y$ 满足 $f(f^{-1}(V)) = V$.

($\Rightarrow$). 对 $\forall$ $V \subseteq Y$ 由上述证明可知 $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ 下面证反包含关系.

对 $\forall$ $y \in V$ $\because$ $f$ 为满射 $\therefore$ $\exists$ $x \in X$ s.t. $f(x) = y$.

$\because$ $f(x) = y \in V$ $\therefore$ $x \in f^{-1}(V)$ $\therefore$ $y = f(x) \in f(f^{-1}(V))$ $\therefore V \subseteq f(f^{-1}(V))$

$\therefore$ $f(f^{-1}(V)) = V$.

($\Leftarrow$). 假设 $f$ 不是满射. 即 $\exists$ $y \in Y$ s.t. $\forall$ $x \in X$ $f(x) \neq y$. ($\forall$ $y \in Y$ $f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow \exists x \in X$ s.t. $x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow$ 有原像).

令 $V = \{y\}$ 由假设条件 $f^{-1}(V) = \phi$ $\therefore$ $f(f^{-1}(V)) = \phi \neq V$ 矛盾 $\therefore f$ 满 □.

3. (P36.3) 设 $f: X \longrightarrow Y$, $S, T \subseteq X$ 则 $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

并举例满足 $f(S \cap T) \neq f(S) \cap f(T)$.

证明：① $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

对 $\forall$ $y \in f(S \cup T)$ 则 $\exists$ $x \in S \cup T$ s.t.

$f(x) = y$. 且由 $x \in S \cup T$ 可知.

$x \in S$ 或者 $x \in T$. 若 $x \in S$ 则

$y = f(x) \in f(S) \subseteq f(S) \cup f(T)$ 若 $x \in T$ 则 $y \in f(T) \subseteq f(S) \cup f(T)$

$\therefore$ $y \in f(S) \cup f(T)$. $\therefore$ $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$

对 $\forall$ $y \in f(S) \cup f(T)$ 即 $y \in f(S)$ 或 $y \in f(T)$.

若 $y \in f(S)$ 即 $\exists$ $x \in S \subseteq S \cup T$ s.t. $y = f(x) \in f(S \cup T)$

若 $y \in f(T)$ 即 $\exists$ $x \in T$ s.t. $y = f(x) \in f(S \cup T)$

$\therefore$ $y \in f(S \cup T)$ $\therefore$ $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$

$\therefore$ $f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$.

② $\forall$ $y \in f(S \cap T)$ 即 $\exists$ $x \in S \cap T$ s.t.

$y = f(x)$ $\because$ $x \in S \cap T \subseteq S$ 且 $x \in T$.

$\Rightarrow$ $y \in f(S)$ 且 $y \in f(T)$ $\therefore y \in f(S) \cap f(T)$

$\therefore$ $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

举例：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (不单).

令 $S = \{1\}$ $T = \{-1\}$.

则 $S \cap T = \phi$ $\therefore$ $f(S \cap T) = \phi$

而 $f(S) = \{1\}$ $f(T) = \{1\}$

$\therefore$ $f(S) \cap f(T) = \{1\} \neq f(S \cap T)$

4 (柯 P26.4) 集合 $S$. 全体子集构成集合 $P(S)=\{T \mid T\subseteq S\}$. 则 $P(S)$ 的基数是多少?

解: 求 $P(S)$ 的基数即求 $S$ 中全体子集的个数. 以如下形式计数:

$\binom{n}{0}$ 个 $\phi$. $\binom{n}{1}$ 个 $\{s_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$ $\binom{n}{2}$ 个双元素子集. $\cdots$ $\binom{n}{n}$ 个 $S$

$\therefore$ 共计 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$ (见上周习题课二项式定理推论).

5. (柯 P26.7) 对称差: $S\Delta T := (S\setminus T)\cup(T\setminus S)$ 证明: $S\Delta T = (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

证明: $\forall\ x\in S\Delta T$ 即 $x\in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \Rightarrow x\in S\setminus T$ 或 $x\in T\setminus S$

且 $S\subseteq S\cup T$, $T\subseteq S\cup T$. $\therefore$ $x\in (S\cup T)\setminus T$ 或 $x\in (S\cup T)\setminus S$

且 $S\cap T\subseteq S$, $S\cap T\subseteq T$ $\therefore$ $x\in (S\cup T)\setminus(S\cap T)$ $\therefore$ $S\Delta T\subseteq (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

$\forall\ x\in (S\cup T)\setminus(S\cap T)$ 即 $x\in S\cup T$ 且 $x\notin S\cap T$

$\because$ $x\in S\cup T$ $\therefore$ $x\in S$ 或 $x\in T$. 若 $x\in S$ 且 $x\notin S\cap T$ $\therefore$ $x\in S\setminus T$

若 $x\in T$ 且 $x\notin S\cap T$ $\therefore$ $x\in T\setminus S$ $\therefore$ $x\in S\setminus T$ 或 $x\in T\setminus S$

$\therefore$ $x\in (S\setminus T)\cup(T\setminus S)$ $\therefore$ $(S\cup T)\setminus(S\cap T)\subseteq S\Delta T$ 综上 $S\Delta T = (S\cup T)\setminus(S\cap T)$ $\square$

6. 齐次线性方程组记为 $AX=0$ (1) 其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$. $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

非齐次线性方程组记为 $AX=b$ (2) 其中 $b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$.

设 $\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 为齐次方程组(1)的解, $\begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} \gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$ 为(2)的解. 求证 $\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ 是(2)的解.

且 $\begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$ 是(1)的解.

证明: 由题意 $A\alpha=0$ (i) $A\beta=b$ (ii) $A\gamma=b$ (iii) 其中 $\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$. $\beta=\begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$. $\gamma=\begin{pmatrix} \gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$.

则 (i)+(ii) 得 $A(\alpha+\beta)=b \Rightarrow \alpha+\beta$ 是(2)的解.

(ii)-(iii) 得 $A(\beta-\gamma)=0 \Rightarrow \beta-\gamma$ 是(1)的解 得证 $\square$.

费马小定理：

设 $p$ 为素数 则对 $\forall\ a,b\in\mathbb{Z}$. 定义 $a\equiv_p b$ 为 $p\,|\,a-b$

（即 带余除法中 $a-b=q\cdot p+r$ 满足 $r=0$）

则 (I) $\equiv_p$ 为等价关系

(II) 对 $\forall\ n\in\mathbb{Z}$. $n^p\equiv_p n$

Pf (I)（复老师已证）(1) 反身性：$\because a-a=0$ 对 $\forall$ 素数 $p\,|\,0$ $\therefore a\equiv_p a$

(2) 对称性. $a\equiv_p b \Rightarrow p\,|\,a-b \Rightarrow p\,|\,b-a \Rightarrow b\equiv_p a$

(3) 传递性. $a\equiv_p b,\ b\equiv_p c \Rightarrow p\,|\,a-b,\ p\,|\,b-c \Rightarrow \begin{cases} a-b=q_1 p \\ b-c=q_2 p\end{cases} + \Rightarrow a-c=(q_1+q_2)p$

$\Rightarrow p\,|\,a-c \Rightarrow a\equiv_p c$

$\therefore \equiv_p$ 是等价关系.

(II) 先证明 $n\in\mathbb{Z}^+$ $n^p\equiv_p n$（数学归纳法）

$n=1$ $n^p-n=1-1=0 \Rightarrow p\,|\,n^p-n \Rightarrow n^p\equiv_p n$ ✓

假设 $n^p\equiv_p n$ 则 $(n+1)^p=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p}$

且对于 $\forall\ 1\le k\le p-1$ $\binom{p}{k}=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}=\dfrac{p\cdot(p-1)!}{k!\cdot(p-k)(p-1-k)!}=\dfrac{p}{p-k}\,\dfrac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!}$

$$=\frac{p}{p-k}\binom{p-1}{k}$$

$\Rightarrow (p-k)\cdot\binom{p}{k}=p\cdot\binom{p-1}{k}$. 注意 $\binom{p-1}{k}$ 为整数. $\therefore p\,|\,(p-k)\binom{p}{k}$

$\because p$ 为素数 且 $p-k<p$ $\therefore \gcd(p,\,p-k)=1$ $\therefore p\,|\,\binom{p}{k}$.

$\therefore (n+1)^p\equiv_p n^p+1\equiv_p n+1$（归纳假设） $\therefore (n+1)^p\equiv_p n+1$ $\therefore \forall n\in\mathbb{Z}^+$. $n^p\equiv_p n$.

$n=0$ 自然成立.

$n\in\mathbb{Z}^-$ 则 $(-n)^p\equiv_p(-n)$ 若 $p=2$ 则 $\cancel{n^2\equiv_2 n}$ $2\,|\,n^2-n$ 对 $\forall\ n\in\mathbb{Z}$ 成立.

$\therefore n^2\equiv_2 n$ 若 $p\ne 2$ 则 $p$ 为奇数. $\Rightarrow -n^p\equiv_p -n \Rightarrow n^p\equiv_p n$ □

# 等价关系.

1. 二元关系

集合 $A$ 上的二元关系 $R$ 为 $A\times A$ 的一个子集，即 $R\subseteq A\times A$

若 有序对 $(x,y)\in R$ 　则称 $x$ 与 $y$ 存在关系 $R$ 记作 $xRy$.

2. 等价关系

设 $\sim$ 是集合 $A$ 上的二元关系，满足：

(1) $\forall\ x\in A$ 　$x\sim x$ (反身性)

(2) 设 $x,y\in A$，$x\sim y\Rightarrow y\sim x$ (对称性)

(3) 设 $x,y,z\in A$，$x\sim y$，$y\sim z\Rightarrow x\sim z$ (传递性)

则称 $\sim$ 是 等价关系.

例：(i) "$\geq$" 满足反身性和传递性，但不满足对称性.

(ii) $\ell:=\{(l_1,l_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上两条直线 $\mid l_1,l_2$ 有公共点$\}$ 满足反身性和对称性，但不满足传递性

(iii). 设 $A=\{1,2\}$，$R=\left\{\begin{matrix}(1,2)\\(1,1)\\(2,1)\\(2,2)\end{matrix}\right\}$ 则 $R$ 满足对称性和传递性但不满足自反性.

( $\because$ $x\sim y\Rightarrow y\sim x$ + $x\sim y, y\sim x\Rightarrow x\sim x$ $\not\Leftarrow$ $\forall\ x\in A.\ x\sim x$)

3. 商集. 商映射. 划分.

设 $\sim$ 是集合 $A$ 上的等价关系 设 $a\in A$ 则 $\bar{a}:=\{b\in A\mid a\sim b\}\leftarrow$ 等价类.

$A/\sim\ :=\{\bar{a}\mid a\in A\}$ 表示 $A$ 中所有等价类的集合，称为 $A$ 关于 $\sim$ 的商集.

$\pi:\ A\longrightarrow A/\sim$ 　称为由 $\sim$ 诱导的商映射 (自然投射)

$a\longmapsto\bar{a}$ 　$\pi$ 为满射.

划分 $P$ 是 $A$ 中一些非空子集构成的集合. 满足 $\begin{cases}\forall\ a\in A\ \ \exists\ p\in P\ \ s.t.\ a\in p.\\ \forall\ p,Q\in P\ \ 若\ p\neq Q\ 则\ p\cap Q=\phi\end{cases}$

注：设 $\sim$ 是 $A$ 上的等价关系 则 商集 $A/\sim$ 为一个划分.

设 $P$ 是 $A$ 中一个划分. 定义二元关系 $\sim_P$ 如下：$a\sim_P b\Leftrightarrow\left(\begin{matrix}\exists\ p\in P\ \ s.t.\\ a,b\in p.\end{matrix}\right)$，则 $\sim_P$ 等价

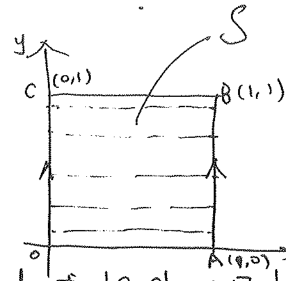
商集 相当于所有班级构成的集合.

商映射 相当于 从同学映到该同学所在的班级.

划分 相当于 对同学们进行分班.

4. 粘合.（代数是能写下来的几何，几何是能画出来的代数）.

1) 圆柱：



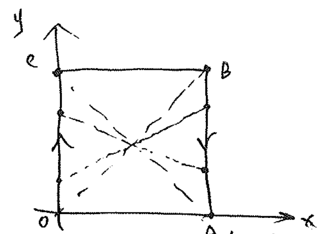

设集合 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}$ 且 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

定义等价关系 $\sim := \{((a,b),(c,d))\in S^2 \mid a=c$ 且 $b=d$ 或 $|a-c|=1$ 且 $b=d\}$

则商集 $S/\sim$ 粘合为圆柱（OC与AB同向粘合）.

或：定义划分 $P:=\{\{(a,b)\}\mid a\in(0,1), b\in[0,1]\}\cup\{\{(0,b),(1,b)\}\mid b\in[0,1]\}$

2) Möbius 带.




设集合 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

定义划分 $P:=\{\{a,b\}\mid a\in(0,1), b\in[0,1]\}\cup\{\{(0,b),(1,1-b)\}\mid b\in[0,1]\}$

则此划分的商集 $S/\sim_P$ 粘合为 Möbius 带（OC与AB反向粘合）.

3) 环面.

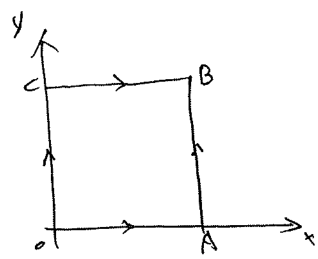
设集合 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

定义划分 $P:=\{\{(a,b)\}\mid a\in(0,1), b\in(0,1)\}\cup$

$\{\{(0,b),(1,b)\}\mid b\in(0,1)\}\cup$

$\{\{(a,0),(a,1)\}\mid a\in(0,1)\}\cup$

$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$




粘合为环面.
即 OC与AB同向粘合
再将 OA与CB同向粘合.

4) Klein 瓶.（三维空间得不到的，需要在四维空间中来看）

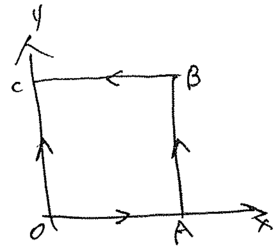
设集合 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

定义划分 $P:=\{\{(a,b)\}\mid a\in(0,1), b\in(0,1)\}\cup$

$\{\{(0,b),(1,b)\}\mid b\in(0,1)\}\cup$

$\{\{(a,0),(1-a,1)\}\mid a\in(0,1)\}\cup$

$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$




粘合为 Klein 瓶
即将 OC与AB同向粘合
再将 OA与CB反向粘合.