偏序关系

1. 称集合A上的一个二元关系 $\preccurlyeq$ 为偏序关系，如果满足.

(1) $\forall x \in A$　$x \preccurlyeq x$　(反身性)

(2) 设 $x, y \in A$.　$x \preccurlyeq y$ 且 $y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$　(反对称性).

(3) 设 $x, y, z \in A$　$x \preccurlyeq y$ 且 $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$　(传递性).

设 $\preccurlyeq$ 为集合A上的一个偏序关系，如果 $\forall x, y \in A$ 均有 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$

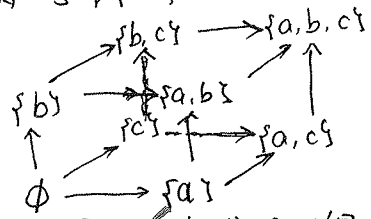
则称 $\preccurlyeq$ 是A上的一个全序关系

例 1) 集合包含和自然数的整除关系均是偏序.

2) "$\leq$", "$\geq$" 是 $\mathbb{R}$ 上的全序关系

3) 设 $S = \{a, b, c\}$　$A = \mathcal{P}(S)$ 为S所有子集的集合.且"$\subseteq$"是A上的偏序.

且A中的偏序图解为：



用"↑"代替"$\subseteq$"

$A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

4). 设 $A = \mathbb{N}^2$ 定义序关系

$(a,b) \preccurlyeq_1 (a',b')$ 如果 $a < a'$ 或 $a = a'$ 且 $b \leq b'$

$(a,b) \preccurlyeq_2 (a',b')$ 如果 $a+b < a'+b'$ 或 $a+b = a'+b'$ 且 $a \leq a'$

} 全序.

$|\{(a,b) \mid (a,b) \preccurlyeq_1 (1,2)\}| = \infty$

$|\{(a,b) \mid (a,b) \preccurlyeq_2 (1,2)\}| = 7$

2. 设 $\preccurlyeq$ 是A上的序关系　如果 $\exists\, a \in A$ s.t. $\forall x \in A$ 均满足 $x \preccurlyeq a$

则称 a 为A中最大元（类似可定义最小元）.

如果 $a \in A$ 且不存在 $x \in A$ s.t. $a \neq x$ 且 $a \preccurlyeq x$ 则称 a 为极大元

（等价地，对于 $a \in A$ 如果 $\exists x \in A$ s.t. $a \preccurlyeq x$ 则 $a = x$）. 类似可定义极小元.

注：最大元可与A中任意元素相比较，且都"大".

最大元可能与A中部分元素不可比，但在可比的元素中它都"大".

极大元可能与A中部分元素不可比，但在可比的元素中它都"大".

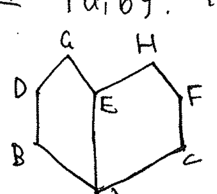
最大元一定是极大元，极大元不一定是最大元.

eg1. 在上例3)中对于集合A，$\{a,b,c\}$ 是最大元．ϕ 是最小元.

若 $B = A \setminus \{\phi, \{a,b,c\}\}$ 则B中无最大元、最小元.

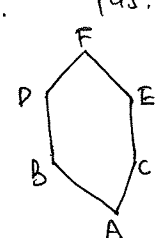
但 $\{a,b\}$. $\{a,c\}$. $\{b,c\}$ 均为极大元．$\{a\}$. $\{b\}$. $\{c\}$ 都是极小元.

2.



无最大元，有极大元 G, H.

有最小元 A.



有最大元F和最小元A.

可数集

集合论是由德国数学家 Georg. Cantor (1845-1918)（康托尔）创立的.

"是数学天才最优秀的作品". "是人类纯粹智力活动的最高成就之一"

"是这个时代（19-20世纪）所能夸耀的最巨大的工作".

"没有人能将我们从康托尔创立的伊甸园中驱赶出来" —— 希尔伯特 (Hilbert).

("No one shall expel us from the paradise that Cantor has created")

希望比较两个集合的大小.

如果均为有限集, 有两种方法 ① 数出两个集合中元素个数再比较大小. ②若构造集合 A 到集合 B 的一个单射 则 $|A|\leq|B|$.

如果集合中有无穷多个元素. 显然方法①不现实. 只能用方法②

所以一般来说, 集合间的映射比集合中元素个数计数更基本.

我们称集合 A, B ~~中元素~~大小相同, 如果存在双射 $\varphi: A\to B$. —— 克隆尼克 (Kronecher)

我们将自然数集合 ($\mathbb{N}$) 作为参照物. (上帝创造了自然数, 其它都是人造的.)

Def 可数集

称集合 A 为可数的, 如果存在双射 $\varphi: A\to\mathbb{N}$ (无重穷集).

称集合 A 为至多可数的, 如果存在单射 $\varphi: A\to\mathbb{N}$

例1. 整数集是可数的.

构造映射 $\varphi: \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ 满足 $\varphi(n)=\begin{cases}2n & (n\in\mathbb{N})\\ -(2n+1) & (n\in\mathbb{Z}^-)\end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots\end{array}$$

例2 有理数集是可数的.

首先证明正有理数集 $\mathbb{Q}^+=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}^+, \gcd(m,n)=1\}$ 可数

(首先证明一个事实: 可数集的无穷子集一定可数 (不显然!))

对 $\forall$ 可数集 由定义到 $\mathbb{N}$ 有一个一一映射. 则该可数集的无穷子集到 $\mathbb{N}$ 的一个无穷子集也是个双射

$\therefore$ 只需证 $\mathbb{N}$ 的无穷子集仍然是可数集. 设这个无穷子集为 M.

由良序原理 (Peano公理: 任何自然数的非空集合一定有最小元)

可知 M 中有最小元. 设为 m_0. 同理 $M\setminus\{m_0\}$ 中仍有最小元 设为 m_1.

m_2 为 $M\setminus\{m_0, m_1\}$ 中最小元, 从此类推 得到一个无穷序列.

构造映射 $\varphi: M\to\mathbb{N}$, $m_i\mapsto i$ $(i=0,1,\cdots)$ 是双射, 即 M 是可数集

$\therefore$ 可数集的无穷子集是可数的. □)

然后证明 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 可数　　$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ := \{(m,n) \mid m,n\in\mathbb{Z}^+\}$

n \ m	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

由图可知全体整数对 (m,n) 构成一个全序集 (按箭头顺序排列) 不妨设按序为 $S_0, S_1, S_2 \cdots$

则易构造双射 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\underset{S_i}{\overset{\|}{(m,n)}} \longmapsto i$$

∴ $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 可数. ~~(数归法可证 有限个可数集的积可数)~~

又∵ $\mathbb{Q}^+ := \{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}^+,\ \gcd(m,n)=1\} \xleftrightarrow{1:1} \{(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ \mid \gcd(m,n)=1\} =: M$

且 M 是可数集 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 的子集 则 $\mathbb{Q}^+$ 要么为有限集, 要么为可数集.

实际上 $\mathbb{Q}^+$ 为可数集 (假设 $\mathbb{Q}^+$ 有限 则 $\exists (\tilde{m},\tilde{n})\in M$ s.t. $\forall (m,n)\in M$ 均满足 $(m,n)\prec(\tilde{m},\tilde{n})$

($\prec$ 为上表中箭头代表的序关系). 显然 $(\tilde{m},\tilde{n})\in M \Rightarrow (\tilde{m}+\tilde{n},\tilde{n})\in M$.

而 $(\tilde{m}+\tilde{n},\tilde{n}) \succ (\tilde{m},\tilde{n})$ 矛盾 ∴ $\mathbb{Q}^+$ 无穷集).

同理可证 $\mathbb{Q}^-$ 也为可数集 ∴ ∃ 双射 $f: \mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ 和 $g: \mathbb{N}\to\mathbb{Q}^-$

构造映射 $\varphi: \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$ 满足

$$\varphi(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}-1) & (n\text{为偶数}) \\ g(\frac{n-1}{2}) & (n\text{为奇数}) \\ 0 & (n=0) \end{cases}$$

验证双射. 满: $\forall q\in\mathbb{Q}$. 若 $q\in\mathbb{Q}^+$ 则 $\exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $m=f^{-1}(q) \Rightarrow q=f(m)$

令 $n=2(m+1)$ 则 $\varphi(n)=q$. 若 $q=0$ 则有 $n=0$ s.t. $\varphi(n)=q$

若 $q\in\mathbb{Q}^-$ 则 $\exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $q=g(m)$ 令 $n=2m+1$ 则 $\varphi(n)=q$.

单: 若 $\varphi(m)=\varphi(n)$ 则 m,n 同奇同偶 (否则一个大于0, 一个小于0)

由于 f,g 均为双射 ∴ $m=n$.

则 $\varphi^{-1}: \mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ 也为双射 ∴ $\mathbb{Q}$ 可数. □

例3. 实数集不可数

证明: (反证法) 假设 $\mathbb{R}$ 可数 则 $[0,1)$ 可数 则存在 $\mathbb{N}$ 到 ~~集~~ $[0,1)$ 的一个双射 $\forall \alpha\in[0,1)$ 可表示为 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots$

不妨给出这个双射表示:

$0 \longleftrightarrow 0.00\cdots0\cdots$

$1 \longleftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$2 \longleftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

$3 \longleftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

构造一个实数 $b=0.b_1b_2b_3\cdots$

其中 ~~$b_i = a_{ii}+1$ ($a_{ii}-1$ 不等于…且 …)~~

则此数必然不在上表中 但 $b\in[0,1)$

矛盾. ∴ $[0,1)$ 不可数 ∴ $\mathbb{R}$ 不可数 □

$$b_i = \begin{cases} a_{ii}+1 & (0\leq a_{ii}<9) \\ a_{ii}-1 & (a_{ii}=9) \end{cases}$$

法：直接构造 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{N}$ 的一个双射.

定义 $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{N}$ 满足 $f(m,n)=\dfrac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}+m-1$

验证 f 是一个双射.

(1) 良定义：$(m_1,n_1)=(m_2,n_2)\Rightarrow m_1=m_2,\ n_1=n_2\Rightarrow f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2)$.

(2) 单射：若 $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 满足 $f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2)$ 即：

$$\frac{(m_1+n_1-1)(m_1+n_1-2)}{2}+m_1-1=\frac{(m_2+n_2-1)(m_2+n_2-2)}{2}+m_2-1 \quad (*)$$

分情况讨论：
(i) $m_1+n_1=m_2+n_2$，由 $(*)$ 可知 $m_1=m_2$，则 $n_1=n_2\Rightarrow(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$
(ii) $m_1+n_1\neq m_2+n_2$ 不妨设 $m_1+n_1<m_2+n_2$ 则：

$$f(m_1,n_1)=\frac{(m_1+n_1-1)(m_1+n_1-2)}{2}+m_1-1\leq\frac{(m_1+n_1-1)(m_1+n_1-2)}{2}+m_1+\overset{>0}{(n_1-1)}-1$$

$$\Rightarrow f(m_1,n_1)\leq\frac{(m_1+n_1-1)(m_1+n_1)}{2}-1\leq\frac{(m_2+n_2-2)(m_2+n_2-1)}{2}-1$$

$$\Rightarrow f(m_1,n_1)<\frac{(m_2+n_2-2)(m_2+n_2-1)}{2}+\overset{>0}{m_2}-1=f(m_2,n_2),\ \rightarrow\leftarrow$$

(3) 满射：首先对 $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists!\,k\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\frac{k(k-1)}{2}-1<N\leq\frac{k(k+1)}{2}-1$

$\left(\because \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^+}\left(\frac{k(k-1)}{2}-1,\frac{k(k+1)}{2}-1\right]=[0,+\infty)\right.$ 且任意两个区间交集为空$)$.

则当 $N=\frac{k(k+1)}{2}-1$ 时 令 $m=k,\ n=1$ 则 $f(m,n)=\dfrac{k\cdot(k-1)}{2}+k-1=\dfrac{k(k+1)}{2}-1=N$

即 $\exists\,(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ s.t. $f(m,n)=N$.

当 $N\in\left(\frac{k(k-1)}{2}-1,\frac{k(k+1)}{2}-1\right)$ 时 令 $m=N-\frac{k(k-1)}{2}+1,\quad n=\frac{k(k+1)}{2}-N$

则 $$f(m,n)=\frac{(k+1-1)(k+1-2)}{2}+N-\frac{k(k-1)}{2}+1-1$$

$$=\frac{k(k-1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}+1-1+N$$

$$=N$$

即 $\exists\,(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ s.t. $f(m,n)=N$.

综上 $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists\,(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ s.t. $f(m,n)=N$ $\therefore f$ 满射 $\square$.

例4. 设 X, Y 为可数集 则它们的笛卡尔积 $X\times Y$ 也为可数集.

证明：$\because$ X, Y 均为可数集 则 $\exists$ 双射 $f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X$, $g: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow Y$

且 $\because$ $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 也是一个可数集 则 $\exists$ 双射 $h: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$

定义映射 $\varphi: \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ \longrightarrow X\times Y$ 验证 φ 为双射

$$(m, n) \longmapsto (f(m), g(n))$$

1) 良定义显然

2) 单：$(f(m_1), g(n_1)) = (f(m_2), g(n_2)) \Rightarrow f(m_1) = f(m_2),\ g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow m_1 = m_2,\ n_1 = n_2$

3) 满：$\forall$ ~~x∈~~ $(x, y) \in X\times Y$ $\exists$ $m \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $f(m) = x$, $\exists$ $n \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $g(n) = y$

即 $\exists$ $(m, n) \in \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ s.t. $\varphi(m, n) = (f(m), g(n)) = (x, y) \Rightarrow \varphi$ 满.

则复合映射 $\varphi\circ h: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X\times Y$ 也为双射 $\Rightarrow X\times Y$ 可数. $\square$

注：~~归纳~~ 数归法可证明 有限个可数集的笛卡尔积 仍然是可数集.