第四次作业.

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

循环分解 $\sigma = (1\,3\,2\,5\,6\,4)(7\,8)$

阶数 为 $\operatorname{lcm}(6,2) = 6$

符号为 $(-1)^{6-1+2-1} = 1$

2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

循环分解 $\sigma = \begin{cases} (1\ n)(2\ n-1)\cdots(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1) & \text{如果 } n \text{ 为偶数} \\ (1\ n)(2\ n-1)\cdots(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}) & \text{如果 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$

$\therefore$ 符号为 $(-1)^{\frac{n}{2}}$ (n 为偶) 或 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ (n 为奇)

(统一来看 σ 的符号为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$)

3. 设 $\sigma \in S_n$. $\forall a, b \in \{1, 2 \cdots n\}$ $a \sim_\sigma b$ if $\exists\, i \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = \sigma^i(b)$

验证 $\sim_\sigma$ 为等价关系.

证. 反身性: $\forall a \in \{1, 2 \cdots n\}$ $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = \sigma^0(a) = a$ $\therefore a \sim_\sigma a$

对称性: $\forall a, b \in \{1, 2, \cdots n\}$ 满足 $a \sim_\sigma b$ ie $\exists\, i \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = \sigma^i(b)$

则 $\sigma^{-i}(a) = b$ $\therefore b \sim_\sigma a$

传递性: $\forall a, b, c \in \{1, 2, \cdots n\}$ 满足 $a \sim_\sigma b$. $b \sim_\sigma c$. ie $\exists\, i, j \in \mathbb{Z}$ s.t.

$a = \sigma^i(b)$, $b = \sigma^j(c)$ $\therefore a = \sigma^i(\sigma^j(c)) = \sigma^{i+j}(c)$

ie $\exists\, s = i+j \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = \sigma^s(c)$ $\therefore a \sim_\sigma c$.

4. 证明：$\forall\ \sigma \in S_n$ 可写成至多 $n-1$ 个对换之积.

Pf. 由 Thm 7.2 对于 $\forall\ \sigma \in S_n$. $\exists$ s 个循环 $\pi_1, \cdots \pi_s$ 两两不相交 $(s \geq 1)$ s.t.

$\sigma = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_s$，设 π_i 的长度为 l_i 则 $\sum_{i=1}^{s} l_i \leq n$

(实际上 $n - \sum_{i=1}^{s} l_i$ 为 σ 使得 $\{1, 2 \cdots n\}$ 保持不动的元素个数)

且对循环 π_i 设 $\pi_i = (j_1\ j_2 \cdots j_{l_i}) = (j_1\ j_{l_i})(j_1\ j_{l_i - 1}) \cdots (j_1\ j_2)$ (参见 P_6 例)

即 π_i 可分解为 $l_i - 1$ 个对换之积. $\therefore$ σ 可分解为 $\sum_{i=1}^{s}(l_i - 1)$ 个对换之积.

且 $\sum_{i=1}^{s} l_i \leq n$. $s \geq 1$ $\therefore$ $\sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} l_i - s \leq n-1$ $\therefore$ 可分解为至多 $n-1$ 个对换之积

5. 设 $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{Z}$. $g = \gcd(a_1, \cdots a_n)$ 证明 $\exists\ u_1, \cdots u_n \in \mathbb{Z}$ s.t. $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = g$.

Pf. 首先证明对 $\forall\ 1 \leq i \leq n-1$ $\gcd(\gcd(a_1, \cdots a_i), a_{i+1}) = \gcd(a_1, \cdots a_{i+1})$.

设 $g_1 = \gcd(\gcd(a_1, \cdots a_i), a_{i+1})$, $g_2 = \gcd(a_1, \cdots a_{i+1})$

则 $g_1 \mid \gcd(a_1, \cdots a_i)$ 且 $g_1 \mid a_{i+1}$ $\Rightarrow$ $g_1 \mid a_j$ $(1 \leq j \leq i+1)$ $\Rightarrow$ $g_1 \mid g_2$.

且 $g_2 \mid a_j$ $(j = 1, 2 \cdots i+1)$ $\Rightarrow$ $g_2 \mid \gcd(a_1, \cdots a_i)$ 且 $g_2 \mid a_{i+1}$ $\Longrightarrow$ $g_2 \mid g_1$

$\Rightarrow g_1 = g_2$.

由扩展欧几里德算法

$\exists\ \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 = \gcd(a_1, a_2) = d_2$

$\exists\ \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha_3 d_2 + \beta_3 a_3 = \gcd(d_2, a_3) = \gcd(a_1, a_2, a_3) = d_3$

$\vdots$

$\exists\ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha_n d_{n-1} + \beta_n a_n = \gcd(d_{n-1}, a_n) = \gcd(a_1, \cdots a_n) = d_n = g$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ g &= \alpha_n(\alpha_{n-1} d_{n-2} + \beta_{n-1} a_{n-1}) + \beta_n a_n \\
&= \alpha_n \alpha_{n-1}(\alpha_{n-2} d_{n-3} + \beta_{n-2} a_{n-2}) + \alpha_n \beta_{n-1} a_{n-1} + \beta_n a_n \\
&= \cdots = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_2 a_1 + \alpha_n \cdots \alpha_3 \beta_2 a_2 + \cdots + \alpha_n \cdots \alpha_{i+1} \beta_i a_i + \cdots + \beta_n a_n \\
&= u_1 a_1 + u_2 a_2 + \cdots + u_n a_n \qquad \square.
\end{aligned}$$

[证法二]. 设 $S = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ 设 $\overset{\sum_{i=1}^{n} u_i a_i}{\overset{\parallel}{g}} \in S$ 且为最小正整数 (S 非空, 由良序公理).

对 $\forall\ b \mid a_i$ $(i = 1, 2 \cdots n)$ (即公因子) 均有 $b \mid g$ 假设 g 不是 $\{a_i \mid i = 1, \cdots n\}$ 公因子. 不妨设 $g \nmid a_1$.

令 [illegible] $\sum g u_i a_i$ [illegible] $\in S$ 与 g 最小性矛盾 $\square$

6 利用扩展欧几里德算法 求 161 和 253 的 gcd 和 lcm，且计算 $u, v \in \mathbb{Z}$ s.t.

$161u + 253v = \gcd(161, 253)$.

解：$\cancel{161}\ 253 = 1\cdot 253 + 0\cdot 161 = r_0$

$161 = 0\cdot 253 + 1\cdot 161 = r_1$

$92 = 253 - 1\cdot 161 = r_0 - q_1 r_1 = r_2$

$69 = 161 - 1\cdot 92 = r_1 - q_2 r_2 = r_3$

$23 = 92 - 1\cdot 69 = r_2 - q_3 r_3 = r_4 = \gcd(161, 253)$

$0 = 69 - 3\cdot 23 = r_3 - q_4 r_4$

$v_0 = 1,\ v_1 = 0 \quad v_2 = v_0 - q_1 v_1 = 1 \quad v_3 = v_1 - q_2 v_2 = -1 \quad v_4 = v_2 - q_3 v_3 = 2.$

$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = u_0 - q_1 u_1 = -1 \quad u_3 = u_1 - q_2 u_2 = 2 \quad u_4 = u_2 - q_3 u_3 = -3.$

$\therefore \gcd(161, 253) = 23 = 253\cdot 2 + 161\cdot(-3)$ 即 $u = -3,\ v = 2$.

$\operatorname{lcm}(161, 253) = \dfrac{161\cdot 253}{23} = 1771 = 161\cdot 11 = 253\cdot 7$ $\begin{cases} u = -3 + 11k \\ v = 2 - 7k \end{cases}$ 均满足条件.

设 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 求方程 $ax + by = c$ 的整数解.

解：设 $g = \gcd(a, b)$ $\quad a' = \dfrac{a}{g} \quad b' = \dfrac{b}{g}$ 则 $\gcd(a', b') = 1$

如果 $g \nmid c$ 则方程无整数解. 如果 $g \mid c$ 设 $c' = \dfrac{c}{g}$ 则方程变为

$a'x + b'y = c'$ 由 Bézout's 关系 $\exists\ u, v \in \mathbb{Z}$ s.t. $a'u + b'v = 1$

$\Rightarrow a'uc' + b'vc' = c' \quad \Rightarrow x_0 = uc',\ y_0 = vc'$ 是方程的一组整数解.

设 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 是方程另一组整数解 即 $a'\tilde{x} + b'\tilde{y} = c' = a'x_0 + b'y_0$

$\Rightarrow a'(\tilde{x} - x_0) = b'(y_0 - \tilde{y}) \quad \because a' \cancel{(\tilde{x} - x_0)} \mid b'(y_0 - \tilde{y})$ 且 $\gcd(a', b') = 1$

$\therefore a' \mid y_0 - \tilde{y}$ 同理 $b' \mid \tilde{x} - x_0$ 不妨设 $y_0 - \tilde{y} = ka' \quad (k \in \mathbb{Z})$

则 $\tilde{x} - x_0 = kb' \quad \therefore \begin{cases} \tilde{y} = y_0 - ka' \\ \tilde{x} = x_0 + kb' \end{cases}$ 由解选取的任意性可知.

$$\begin{cases} x = u\dfrac{c}{g} + k\dfrac{b}{g} \\ y = v\dfrac{c}{g} - k\dfrac{a}{g} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ 为方程全部整数解.}$$

线性相关与线性无关

设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 为 k个 n维列向量.

如果 ∃ 不全为0的 k个实数 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ s.t.

线性组合. $\leftarrow$ $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$

则称 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关，否则称为线性无关.

Prop. 1. $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关 $\iff$ 如果 $\exists\, \alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$ 则 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

2. $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 均可表示为 $\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_l$ 的线性组合 $(k > l)$ 则 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关

eg2. 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关. $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ $(\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \cdots k)$.

且 $\alpha_1 \neq 0$ 证明 $\vec{v}, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关.

Pf. 设 $\beta_1, \cdots \beta_k \in \mathbb{R}$ s.t. $\beta_1\vec{v} + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k = \vec{0}$

则 $\beta_1(\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k) + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k = \vec{0}$.

则 $\beta_1\alpha_1\vec{v}_1 + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\beta_1\alpha_k + \beta_k)\vec{v}_k = \vec{0}$

$\because$ $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关 $\therefore$ $\beta_1\alpha_1 = 0$, $\beta_1\alpha_i + \beta_i = 0$ $(i = 2, 3 \cdots k)$

又 $\because$ $\alpha_1 \neq 0$ $\therefore$ $\beta_1 = 0$ $\therefore$ $\beta_i = 0$ $(i = 2, \cdots k)$ $\therefore$ $\vec{v}, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关.

eg1. 设 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关，判断 $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{u}_2 - \vec{u}_3$, $\vec{u}_3 - \vec{u}_1$ 线性无关还是线性相关.

解：设 ∃ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \alpha_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + \alpha_3(\vec{u}_3 - \vec{u}_1) = 0$

则 $(\alpha_1 - \alpha_3)\vec{u}_1 + (-\alpha_1 + \alpha_2)\vec{u}_2 + (-\alpha_2 + \alpha_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$

$\because$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 线性无关 则 $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases}$ eg $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$

$\Rightarrow$ 非0系数.

$\therefore$ $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{u}_2 - \vec{u}_3$, $\vec{u}_3 - \vec{u}_1$ 线性~~无~~关.

相.

eg3. 设 $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $k \le n$.

(1) 如果 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关 则对 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 分别添加 m 维分量

变成 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中 m 元素. 记 $\vec{v}_1', \cdots \vec{v}_k'$ 则 $\vec{v}_1' \cdots \vec{v}_k'$ 是否仍然线性无关?

(2) 如果 $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k$ 线性相关呢?

解: (1). 如果 $\exists\ \alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1 \vec{v}_1' + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k' = \vec{0}$ (*)

设 $\vec{v}_i' = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \\ a_{in+1} \\ \vdots \\ a_{in+m} \end{pmatrix}$ 且 $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$

则 (*) 表示为 $\alpha_1 a_{1j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} = 0$ ($j = 1, 2 \cdots n, n+1, \cdots n+m$).

$\because \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关, $\therefore$ 前 n 个方程只有零解. $\therefore$ (*) 只有 0 解.

$\therefore \vec{v}_1' \cdots \vec{v}_k'$ 线性无关.

(2). 如果 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关 则 $\exists$ 不全为 0 的 $\alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ s.t.

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = 0$ 即 (*) 前 n 个方程有非 0 解.

加入 m 个方程后 有 2 种可能: $\begin{cases} \text{仍有非 0 解 (线性相关)} \\ \text{仅有 0 解 (线性无关)} \end{cases}$

eg. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 线性相关. 但 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中线性无关. □.

eg4. 设 $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$. $k \le n$. $m \le n$.

(1) $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关 如果去掉 m 维分量. 是否仍线性无关.

(2) 线性相关呢?

(1) 不一定 eg. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关 但 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性相关. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关.

(2). $\exists\ \alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$ 即 以 n 个 k 元齐次线性方程组

有非零解. 去掉 m 个方程 以非零解 $\alpha_1, \cdots \alpha_k$ 仍为方程组一解.

$\therefore$ 仍然线性相关.

注: 比较结论: $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_m$ 线性无关 $(m < k)$ / $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_m$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k$ 线性相关

极大线性无关组

设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空. 如果 S 的一个子集 $T\subseteq S$ 满足:

(1) T 是一个线性无关集.

(2) $\forall \vec{v}\in S$, $T\cup\{\vec{v}\}$ 是线性相关的.

则称 T 为 S 的极大线性无关集(组) ⟵ 不唯一.

Lemma1 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空. $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\in S$ 为 k 个线性无关的向量.

则 $\exists\, T\subseteq S$ 为极大线性无关组 s.t. $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\in T$.

(ie $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 可扩充为 S 的一组极大线性无关组)

Lemma2 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空且 $S\neq\{\vec{0}\}$ 则

1) S 中有极大线性无关组.

2) 如果 T_1, T_2 均为 S 的极大线性无关组 则 $|T_1|=|T_2|$.

Lemma3 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空, $T\subseteq S$ 为极大线性无关组.

则 $\forall\ \vec{v}\in S$, $\vec{v}$ 可由 T 中元素唯一线性表出.

Pf. 对 $\forall\,\vec{v}\in S$ 由极大线性无关组定义. $T\cup\{\vec{v}\}$ 线性相关.

则 $\exists\,\alpha_i\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ s.t. $\sum\limits_{\vec{u}_i\in T}\alpha_i\vec{u}_i+\beta\vec{v}=0$ 且 α_i, β 不全为 0.

如果 $\beta=0$ 则由于 T 是一个线性无关集 $\therefore\ \alpha_i=0$ $\rightarrow\leftarrow$.

$\therefore\beta\neq0$ 则 $\vec{v}=\sum\limits_{\vec{u}_i\in T}(-\frac{\alpha_i}{\beta})\vec{u}_i$ 可由 T 中元素线性表出.

假设 $\exists\,\gamma_i\in\mathbb{R}$ s.t. $\vec{v}=\sum\limits_{\vec{u}_i\in T}\gamma_i\vec{u}_i$ 则 $\sum\limits_{\vec{u}_i\in T}(\gamma_i+\frac{\alpha_i}{\beta})\vec{u}_i=0$

由于线性无关的性质 $\gamma_i=-\frac{\alpha_i}{\beta}$ $(\forall i)$ $\therefore$ $\vec{v}$ 可由 T 中元素唯一线性表出. ∎

Lemma4 (不讲) $\forall\ S\subseteq\mathbb{R}^n$ 且 $S\neq\{\vec{0}\}$ 则可在有限步内找到 S 的一个极大线性无关组.

(偏序关系由 $\subseteq$ 定义).

Pf. $\forall\ \vec{v}_1\in S$ 且 $\vec{v}_1\neq\vec{0}$ 如果 $S\subseteq\langle\vec{v}_1\rangle$ 则 $\{\vec{v}_1\}$ 是 S 的极大线性无关组.

否则 即 $S\not\subseteq\langle\vec{v}_1\rangle$ 即 $\exists\ \vec{v}_2\in S$ s.t. $\vec{v}_2\notin\langle\vec{v}_1\rangle$ 则 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关.

如果 $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle\supseteq S$ 则 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 是 S 的极大线性无关集. 否则重复上述步骤.

$\because\ \mathbb{R}^n$ 中至多有 n 个线性无关的向量. $\therefore$ 一定在有限步得到 S 的极大线性无关组

∎

eg. 设 $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性子空间，T_1, T_2 为 V_1, V_2 的极大线性无关组。

如果 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ 则 $T_1 \cup T_2$ 是 $V_1 + V_2$ 的极大线性无关组。

Pf. 设 $T_1 = \{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_{m_1}\}$ $T_2 = \{\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2}\}$ 则 $T_1 \cup T_2 = \{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_{m_1}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2}\}$

首先证明 $T_1 \cup T_2$ 是线性无关集：设 $\alpha_1, \cdots \alpha_{m_1}, \beta_1, \cdots \beta_{m_2} \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \vec{w}_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{j=1}^{m_2} (-\beta_j) \vec{w}_j \in V_1 \cap V_2$$

$\therefore \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \vec{w}_j = 0$ 由 $\{\vec{v}_i \mid i=1, \cdots m_1\}, \{\vec{w}_j \mid j=1, \cdots m_2\}$ 均为线性无关集。

$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m_1} = 0 \quad \beta_1 = \cdots = \beta_{m_2} = 0 \quad \therefore \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_{m_1}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2}$ 线性无关。

再证明 $\forall \vec{u} \in V_1 + V_2$ 可由 $T_1 \cup T_2$ 线性表出。(即 $T_1 \cup T_2 \cup \{\vec{u}\}$ 线性相关)

$\because \vec{u} \in V_1 + V_2$ 则 $\exists \vec{v} \in V_1, \vec{w} \in V_2$ s.t. $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ $(j = 1, 2 \cdots m_2)$

又由于 T_i 是 V_i 的极大线性无关组 $(i=1,2)$ $\therefore \exists \alpha_i' \in \mathbb{R}$ $(i=1,2\cdots m_1)$ $\beta_j' \in \mathbb{R}$

s.t. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i' \vec{v}_i \quad \vec{w} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j' \vec{w}_j \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i' \vec{v}_i + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j' \vec{w}_j \Rightarrow$ 可线性表出。

$\therefore T_1 \cup T_2$ 是 $V_1 + V_2$ 的极大线性无关组。 $\square$