第5次作业.

1. 计算 $Y=2X_1+5X_2-3X_3$，$X_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\5\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-9\end{pmatrix}$.

解. $Y = 2\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\5\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\10\\-14\\48\end{pmatrix}$

2. 求齐次线性方程组使得 $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=3\\z=1\end{cases}$ 都为解.

解: 设该方程组为 $a_i x + b_i y + c_i z = 0 \quad (i=1,2\cdots m)$ n为方程个数，待定.

由题意 对 $\forall\, i=1,\dots,n$，$\begin{cases}a_i + c_i = 0\\ a_i + b_i + c_i = 0\\ a_i + 3b_i + c_i = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_i = -c_i\\ b_i = 0\end{cases}$

~~$\dim \mathrm{rank}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\rangle = 2$~~

($\dim\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\rangle = 2$

$\Rightarrow$ 方程组系数矩阵 rank $=1$.

$\Rightarrow$ 只有一个非0方程.)

(thm 2.4)

$\therefore$ 方程组为 $a_i x - a_i z = 0 \quad (a_i \in \mathbb{R})$.

由于方程组非零. $\therefore a_i \neq 0$. $\therefore x - z = 0$

则 $x - z = 0$ ~~可使得~~ 有上述三个解.

(解空间恰好为 $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\rangle = V$: $\dim V = 2$ ~~且~~ 设解空间为U. 则 $V \subseteq U$ 且 $\dim U = \dim V$).

3. 举例，一组向量两两线性无关，但全体线性相关.

eg. $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$，$\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$，$\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ 均线性无关.

但 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ 线性相关.

4. (1) $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ 线性无关. $\vec{v}_1+\vec{v}_2$，$\vec{v}_2+\vec{v}_3$，$\dots$ $\vec{v}_n+\vec{v}_1$ 线性无关否?

(2) 〃 〃 相关 〃 〃 —— 相关.

解 (1) 如果 $\exists\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2) + \alpha_2(\vec{v}_2+\vec{v}_3) + \dots + \alpha_n(\vec{v}_n+\vec{v}_1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_n)\vec{v}_1 + (\alpha_1+\alpha_2)\vec{v}_2 + \dots + (\alpha_{n-1}+\alpha_n)\vec{v}_n = \vec{0}$

$\because \vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ 线性无关 $\therefore \begin{cases}\alpha_1+\alpha_n=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}+\alpha_n=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\alpha_n\\ \alpha_2=\alpha_n\\ \vdots\\ \alpha_n=(-1)^n\alpha_n\end{cases}$ ~~如果n为奇数~~ $\Rightarrow \begin{cases}\text{n为奇 则线性无关.}\\ \text{n为偶. 则线性相关}\ (\alpha_i=(-1)^i \text{ 即可})\end{cases}$

(2) 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n$ 线性相关. 则 ∃ 不全为 0 的实数 $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$ 不妨设 $\alpha_1 \neq 0$ 则 $\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n}{\alpha_1}$

如果 ∃ $\beta_1, \cdots \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\beta_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2) + \cdots + \beta_n(\vec{v}_n+\vec{v}_1) = \vec{0}$

则 $\beta_1\left(-\frac{\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n}{\alpha_1}+\vec{v}_2\right) + \cdots + \beta_n\left(\vec{v}_n - \frac{\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n}{\alpha_1}\right) = \vec{0}$.

∴ $\overbrace{\left(\beta_1\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}+\beta_2 + \beta_n\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right)}^{\gamma_2}\vec{v}_2 + \cdots + \overbrace{\left(\beta_1\left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)+\beta_{n-1}+\beta_n\frac{\alpha_1-\alpha_n}{\alpha_1}\right)}^{\gamma_n}\vec{v}_n = \vec{0}$

则我们有 $n-1$ 个关于 $\beta_1, \cdots \beta_n$ 的方程 由于方程个数少于未知元个数.

∴ 当令全体 $\gamma_i = 0$ 时 有非零解 $\beta_1 \cdots \beta_n$.

则 ∃ 一组不全为零的 $\beta_1, \cdots \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\beta_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\cdots+\beta_n(\vec{v}_n+\vec{v}_1)=0$ ⇒ 线性相关 □

注: $n=3$ 时

如果 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关. 设 $\alpha_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\alpha_2(\vec{v}_2+\vec{v}_3)+\alpha_3(\vec{v}_1+\vec{v}_3)=\vec{0}$

则 $(\alpha_1+\alpha_3)\vec{v}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v}_2+(\alpha_2+\alpha_3)\vec{v}_3=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$

∴ $(\vec{v}_1+\vec{v}_2), (\vec{v}_2+\vec{v}_3), (\vec{v}_3+\vec{v}_1)$ 线性无关.

如果 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性相关. 设 $a\vec{v}_1+b\vec{v}_2+c\vec{v}_3=0$. ($a, b, c$ 不全为 0)

不妨设 $a \neq 0$ 则 $\vec{v}_1 = -\frac{b}{a}\vec{v}_2 - \frac{c}{a}\vec{v}_3$ 则 $\vec{w}_1 = \vec{v}_1+\vec{v}_2 = (1-\frac{b}{a})\vec{v}_2 - \frac{c}{a}\vec{v}_3$

$\vec{w}_2 = \vec{v}_2+\vec{v}_3$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_3+\vec{v}_1 = -\frac{b}{a}\vec{v}_2+(1-\frac{c}{a})\vec{v}_3$

设 $\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2 + \alpha_3\vec{w}_3 = 0$

则 $\begin{cases}(1-\frac{b}{a})\alpha_1 + \alpha_2 + (-\frac{b}{a})\alpha_3 = 0\\ (-\frac{c}{a})\alpha_1 + \alpha_2 + (1-\frac{c}{a})\alpha_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -c+b+a\\ \alpha_2 = -a+b+c\\ \alpha_3 = a-b+c\end{cases}$

[方法二]:
∵ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性相关.
不妨设 $\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$
则 $\left.\begin{matrix}\vec{v}_1+\vec{v}_2\\ \vec{v}_2+\vec{v}_3\\ \vec{v}_1+\vec{v}_3\end{matrix}\right\}$ 是 $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ 的线性组合. ⇒ 线性相关

∵ $a \neq 0$ ∴ $a+b-c$ 和 $a-b+c$ 不全为 0 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不全为 0 ∴ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ 线性相关.

错误点: 设 $\alpha_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\alpha_2(\vec{v}_2+\vec{v}_3)+\alpha_3(\vec{v}_3+\vec{v}_2)=\vec{0}$ $\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\beta_3\vec{v}_3=\vec{0}$ ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不全为 0)

∴ $(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v}_1 + (\alpha_1+\alpha_3)\vec{v}_2 + (\alpha_2+\alpha_3)\vec{v}_3 = 0$. $\cancel{\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=\beta_1\\ \alpha_1+\alpha_3=\beta_2\\ \alpha_2+\alpha_3=\beta_3\end{cases}}$

∵ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性~~相~~关 $\not\Rightarrow$ $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_3$, $\alpha_2+\alpha_3$ 不全为 0.

⇓

∃ $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ 不全为 0 s.t. $\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\beta_3\vec{v}_3=\vec{0}$.

5. 证明：如果 $\vec{u}$ 可由 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_n$ 线性表出，则 $\vec{u}$ 可由其极大线性无关组线性表出.

Pf. 由题意 $\exists\ \alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$. s.t. $\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$.

设不失一般性 设 ~~$\{\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_s\}$~~ $\{\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_s\}$ 是 $\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_n\}$ 的极大线性无关组. $(s\le n)$

则 $\vec{v}_i=\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_{ij}\vec{u}_j$ $(\beta_{ij}\in\mathbb{R})$. $\therefore\ \vec{u}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_{ij}\vec{u}_j\right)$

$\Rightarrow\ \vec{u}=\sum\limits_{j=1}^{s}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{ij}\alpha_i\right)\vec{u}_j$ 令 $\gamma_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_{ij}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}=\sum\limits_{j=1}^{s}\gamma_j\vec{u}_j$ □.

6. $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$. $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$ $\vec{v}_4=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}_5=\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关.

(2). 将 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 扩充为 $\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_5\}$ 的极大线性无关组.

Pf(1). 设 $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\alpha_2=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1=0$ $\therefore$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关.

解(2). 设 $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=0$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2+3\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3=0\\3\alpha_1+4\alpha_2+6\alpha_3=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=2t\\\alpha_2=-3t\\\alpha_3=t\end{cases}$ 为一组解. $(t\in\mathbb{R})$

$\therefore$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关. $\therefore$ $\vec{v}_3$ 不在极大线性无关组中.

设 $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_4\vec{v}_4=0$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2+4\alpha_4=0\\\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_4=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4=0\\3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_4=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=5t\\\alpha_2=-4t\\\alpha_3=t\end{cases}$ 为解 $(t\in\mathbb{R})$.

$\therefore$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_4$ 线性相关.

设 $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_5\vec{v}_4=0$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2+6\alpha_5=0\\\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_5=0\\2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_5=0\\3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_5=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=7t\\\alpha_2=-6t\\\alpha_3=t\end{cases}$ 为解 $(t\in\mathbb{R})$

$\therefore$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_5$ 线性相关.

$\therefore$ $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 为 $\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_5\}$ 的极大线性无关组 □.

线性子空间(线性闭集)

Def. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $V \neq \phi$ 如果 $\underbrace{\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \text{均有}\ \alpha v_1 + \beta v_2 \in V}_{\text{线性封闭}}$

则称 V 为一个线性子空间(线性闭集)

eg1. 给定 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ 由 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m$ 张成的子空间为:

$$V = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m \rangle = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m \mid \alpha_1, \cdots \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

且 V 为包含 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m$ 的最小子空间.

Pf. 1) V 是线性子空间.

$\forall\ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V$. $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ 设 $\vec{w}_1 = \alpha_{11} \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{1m} \vec{v}_m$. $\vec{w}_2 = \alpha_{21} \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{2m} \vec{v}_m$.

则 $~~\alpha~~\ \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 = (\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{22}) \vec{v}_1 + \cdots + (\beta_1 \alpha_{1m} + \beta_2 \alpha_{2m}) \vec{v}_m \in V$

2) V ~~最~~为包含 $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_m$ 的最小子空间.

首先 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m \in V$ 显然.

设 $W \supseteq \{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_m\}$ 且 W 为线性子空间.

~~则 $\forall\ \alpha_1, \cdots \alpha_m \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i \in W$~~ 设 $\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m \in V$ 为任一元素.

如果 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 中没有非0元 即 $\vec{w} = \vec{0}$ 则 $\vec{w} \in W$ 显然 ~~$\alpha_1, \cdots \alpha_k \neq 0$. 设 $\vec{w}' = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k$~~

假设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 中有 k 个非0元时 $\vec{w} \in W$, ~~不妨设~~

则 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 中有 $k+1$ 个非0元时. 不妨设 $\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}$ 非0, $\alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_m = 0$

由归纳假设 $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k \in W$. 且 $\vec{v}_{k+1} \in W$ $\therefore \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k + \alpha_{k+1} \vec{v}_{k+1} \in W$

由上述归纳法证明可知 $\vec{w} \in W$ $\therefore V \subseteq W$. $\square$.

eg2. 齐次线性方程组的(解空间)所有解构成一个线性子空间.

考虑线性方程组 $(H) = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$ 令 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ (系数矩阵)

令 $V_H(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots m) \right\}$ 为所有解的集合.

(第一次作业 习题3)

注: 非齐次的解不构成子空间.

基与维数.

Def 设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性子空间. 且存在一组线性无关的向量 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ s.t. $V = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r \rangle$

则称 $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r\}$ 构成 V 的一组基.

Thm 设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性子空间(线性封闭), 则 V 有基且任意两组基含相同向量个数.

我们称其基中元素个数为 V 的维数, 记作 $\dim V$

注: $\dim \mathbb{R}^n = n$ 且 $\mathbb{R}^n$ 中一组自然基: $\left\{ e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{行} \;\middle|\; i=1,2\cdots n \right\}$.

$0 = \{\vec{0}\}$, $\dim 0 = 0$.

命题 1. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非零线性子空间. $\dim V = d$ 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r \in V$ 线性无关 $(r \leq d)$

则 $\exists\ \vec{v}_{r+1}, \cdots \vec{v}_d \in V$ s.t. $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_d\}$ 为 V 的一组基 (扩充成基).

2. $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为两个 ~~非零~~ 子空间 且 $U \subseteq V$ 则 $\dim U < \dim V \Leftrightarrow U \neq V$

3. $\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关.

4. 设 $V = \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ 则 S 的一组极大线性无关组就是 V 的一组基.

子空间的交与和.

设 $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性子空间 则 $\begin{cases} V_1 + V_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2\} \\ V_1 \cap V_2 = \{\vec{v} \mid \vec{v} \in V_1 \text{ 且 } \vec{v} \in V_2\} \end{cases}$ 验证均为子空间

注: $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle = \langle v_1, \cdots v_{d_1}, w_1, \cdots w_{d_2} \rangle$ 但 $V_1 \cup V_2$ 不见得是子空间.

eg $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ 则 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$ $V_1 \cup V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

且对于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 \cup V_2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V_1 \cup V_2 \Rightarrow V_1 \cup V_2$ 不是子空间.

Def 如果 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ 则称和 $V_1 + V_2$ 为直和 记为 $V_1 \oplus V_2$.

Prop $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \forall\ \vec{x} \in V\ \ \exists!\ \vec{x}_1 \in V_1, \vec{x}_2 \in V_2$ s.t. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Pf. ($\Rightarrow$). 设 $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_1' + \vec{x}_2' \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_1' = \vec{x}_2' - \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_1', \vec{x}_2' - \vec{x}_2 \in V_1 \cap V_2$

$\therefore \vec{x}_1 = \vec{x}_1'$, $\vec{x}_2 = \vec{x}_2' \Rightarrow$ 分解唯一.

($\Leftarrow$) $\forall\ \vec{x} \in V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 + V_2$ 且 $\vec{x} = \overset{\in V_1}{\vec{0}} + \overset{\in V_2}{\vec{x}} = \overset{\in V_1}{\vec{x}} + \overset{\in V_2}{\vec{0}}$ 由唯一性 $\Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ □

Def 设 $V_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 V_1, V 均为子空间 如果 $\exists$ 子空间 V_2 s.t. $V = V_1 \oplus V_2$

则称 V_2 为 V_1 的一个直和补（补空间）。同样地，V_1 也是 V_2 的一个补。

注 1. 利用基的扩充得到补

2. 补空间不唯一 eg $\mathbb{R}^2 = \underbrace{\langle \binom{0}{1} \rangle}_{V_1} \oplus \underbrace{\langle \binom{1}{0} \rangle}_{V_2} = \langle \binom{0}{1} \rangle \oplus \underbrace{\langle \binom{1}{1} \rangle}_{V_3}$ $V_2 \neq V_3$ 但都是 V_1 补空间

Thm（维数公式）

设 $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为线性子空间 则 $\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Pf. 设 $\dim V_1 = m_1$. $\dim V_2 = m_2$ 且 $\dim(V_1 \cap V_2) = r \leq \min(m_1, m_2)$.

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r\}$

Case 1. 如果 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ~~易得~~ $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ (习题课讲义五 P7 eg) ~~作业~~

Case 2 如果 $r > 0$ 且 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ 且 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_2$ $\therefore \exists\ \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_{m_1-r}$,

$\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2-r} \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_{m_1-r}\}$ 构成 V_1 一组基.

$\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2-r}\}$ 构成 V_2 一组基. (基扩充定理) ~~下面证明 $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r$~~

下面证明 $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_{m_1-r}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2-r}\}$ 构成 (V_1+V_2) 一组基.

首先证明线性无关：设 $\alpha_1, \cdots \alpha_r, \beta_1, \cdots \beta_{m_1-r}, \gamma_1, \cdots \gamma_{m_2-r} \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{m_1-r} \beta_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m_2-r} \gamma_i \vec{w}_i = 0 \Rightarrow$$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{m_1-r} \beta_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m_2-r} (-\gamma_i) \vec{w}_i \in V_1 \cap V_2$ 则 $\exists\ \xi_1, \cdots \xi_r \in \mathbb{R}$

s.t. $\vec{x} = \xi_1 \vec{v}_1 + \cdots + \xi_r \vec{v}_r$ $\because \{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_{m_2-r}\}$ 线性无关.

$\therefore \xi_1 = \cdots = \xi_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m_2-r} = 0$ 同理 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_{m_1-r} = 0$

$\therefore \{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_{m_1-r}, \vec{w}_1 \cdots \vec{w}_{m_2-r}\}$ 线性无关.

又 $V_1 + V_2 = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_r, \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_{m_1-r}, \vec{w}_1 \cdots \vec{w}_{m_2-r} \rangle$ $\therefore$ 构成一组基 □.

矩阵的秩

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

行向量组 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots \vec{A}_m$ 其中 $\vec{A}_i = (a_{i1}, \cdots a_{in})$

列向量组 $\vec{A}^{(1)}\ \vec{A}^{(2)} \cdots \vec{A}^{(n)}$ 其中 $\vec{A}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

行空间 $V_r(A) = \langle \vec{A}_1, \cdots \vec{A}_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^{1\times n}$ 行秩 $r_r(A) = \dim V_r(A)$

列空间 $V_c(A) = \langle \vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}$ 列秩 $r_c(A) = \dim V_c(A)$

Thm $r_r(A) = r_c(A)$ 定义为矩阵 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$.

通过初等行变换（I：交换第i,j两行，II：i行乘λ加到j行，III：i行乘λ≠0）

得到阶梯形矩阵，其中 r 行非 0 则 $\mathrm{rank}\,A = r$.

eg! $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 6 & -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \xrightarrow{①②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2①+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & -10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5①+③}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-②+③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}\,A = 2.$

线性方程组的解.

(H) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 向量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $AX = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}n$个.

设解空间为 $V_H(A)$ 则 $\dim V_H(A) = n - \mathrm{rank}\,A$.

Thm. (H) 有非零解 $\iff V_H(A) \supsetneq \{\vec{0}\} \iff \mathrm{rank}\,A < n$.

(L) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$ $A = (a_{ij})_{m\times n}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $AX = \vec{b}$

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} = (A\ \vec{b})$

Thm (L) 有解（相容）$\iff \mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,B$. ; (L) 确定（唯一解）$\iff \mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,B = n$.