第六次作业.

$V=\bigoplus V_i$ 直和 $\quad V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{0\}$ $\quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$ 表法不唯一 $\quad V_i \cap \sum V_j \neq \{0\}$ $\quad \Leftarrow$ 假设

1. (柯 P55. 1) $\forall \vec{v} \in V \quad \exists!\ (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \in V_1 \times V_2 \quad s.t. \quad \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} \quad \Rightarrow \quad V = V_1 \oplus V_2$

证. $\forall\ \vec{v} \in V_1 \oplus V_2$ 则 $\exists\ \vec{v_1} \in V_1,\ \vec{v_2} \in V_2\ \ s.t.\ \ \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

且假设 $\exists\ \vec{v_1}' \in V_1,\ \vec{v_2}' \in V_2\ \ s.t.\ \ \vec{v} = \vec{v_1}' + \vec{v_2}'$ 则 $\vec{v_1} - \vec{v_1}' = \vec{v_2}' - \vec{v_2} \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\Rightarrow \vec{v_1} = \vec{v_1}',\ \vec{v_2} = \vec{v_2}'$ 即 $\exists!\ (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \in V_1 \times V_2\ \ s.t.\ \ \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v} \in V.$

$\forall\ \vec{v} \in V \quad \because \exists\ \vec{v_1} \in V_1,\ \vec{v_2} \in V_2\ \ s.t.\ \ \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} \Rightarrow \vec{v} \in V_1 + V_2$

假设 $\exists\ \vec{u} \in V_1 \cap V_2$ 且 $\vec{u} \neq \vec{0}$ 则 $\vec{v} = (\vec{v_1} + \vec{u}) + (\vec{v_2} - \vec{u})$

其中 $\vec{v_1} + \vec{u} \in V_1,\ \vec{v_2} - \vec{u} \in V_2$ 与唯一表示矛盾 $\therefore V_1 \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

综上 $V = V_1 \oplus V_2$.

2. 设 $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为子空间. $V_1 + V_2$ 是直和 $\Longleftrightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

证 如果 V_1+V_2 是直和 则 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ 由 $\boxed{\text{维数公式}}$:

$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$

反过来 如果 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow V_1 + V_2$ 是直和.

3. (柯 P55. 4) $X_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ 线性无关. $V = \langle X_1, X_2 \rangle$ 证明 $X = \begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix} \in V$. 求补.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\ \ s.t.\ \ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0\\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\end{cases} \quad \left(\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&0\end{pmatrix}\right)$

$\therefore X_1, X_2$ 线性无关. $V = \langle X_1, X_2 \rangle = \{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

令 $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 = -5\\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 9\end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c}1&3&-5\\2&2&2\\3&1&9\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&-5\\0&-4&12\\0&-8&24\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&-5\\0&1&-3\\0&0&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&0&4\\0&1&-3\\0&0&0\end{array}\right)$

$\therefore \begin{cases}\alpha_1 = 4\\ \alpha_2 = -3\end{cases}$ 即 $4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}$

$U = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=X_3} \rangle$, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\ \ s.t.\ \ \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$X_1\ X_2\ X_3$ 线性无关 $\therefore V \oplus U = \mathbb{R}^3$

直和. 即 V, U 的基张成 $\mathbb{R}^3$. ~~不~~ 不一定与 X_1, X_2 均垂直.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$

4.（书 P56, 5） $X_1, X_2 \cdots X_n \in \mathbb{R}^n$. $\langle X_1, \cdots X_n \rangle = \mathbb{R}^n \iff X_1, \cdots X_n$ 线性无关.

证.(⟹) 设 $\langle X_1, \cdots X_n \rangle = \mathbb{R}^n$. 反证. 且 $X_1, \cdots X_n$ 线性相关. 则 $\exists \{X_{i_1}, \cdots X_{i_d}\} \subsetneq \{X_1, \cdots X_n\}$ $(d<n)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. $\therefore \dim(\mathbb{R}^n) = d < n$ 矛盾 $\therefore X_1, \cdots X_n$ 线性无关.

(⟸) 设 $X_1, \cdots X_n$ 线性无关. $\because$ $\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关. $\therefore$ 对 $\forall X \in \mathbb{R}^n$.
$\exists\ \alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}$ 不全为0 s.t. $\alpha X + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \vec{0}$ 且 如果 $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ $(i=1,2\cdots n)$ 矛盾.
$\therefore \alpha \neq 0$ $\therefore X = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) X_i \in \langle X_1, \cdots X_n \rangle \Rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq \langle X_1, \cdots X_n \rangle$
显然. $\because X_i \in \mathbb{R}^n$ $\therefore \langle X_1, \cdots X_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ $\therefore \mathbb{R}^n = \langle X_1, \cdots X_n \rangle$ □

$\boxed{\text{方2: } x_i \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n}$ 又 $\dim(\langle\ \rangle) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ $\therefore \langle\ \rangle = \mathbb{R}^n$
$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是一组基（由定义）.

5. 求矩阵的秩:

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

列变换

解: (1) $A_1 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -39 & -3 & -6 & 3 & 5 \\ -26 & -2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A_1 = 2.$

(2) $A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A_2 = 3.$

(3) $A_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A_3 = 5.$

6. 设 $a_0, \cdots a_{n-1}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 求下列矩阵的秩.

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$

如果 $a_0 = 0$ 则 $\operatorname{rank} A_1 = n-1$
$a_0 \neq 0$ $\operatorname{rank} A_1 = n$.

看阶梯形的非0行求矩阵的秩.
列或行变换.

$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \cdots & \mu & 1 \\ \mu & \lambda & \cdots & \mu & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \lambda & 1 \\ \mu & \mu & \cdots & \mu & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-\mu & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\mu & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

列变换.

如果 $\lambda = \mu$ 则 $\operatorname{rank} A_2 = 1$
$\lambda \neq \mu$ 则 $\operatorname{rank} A_2 = n$.

(3). $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $a_{ij}=\min(i,j)$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2&\cdots&2&2\\\vdots&&&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2&3&\cdots&(n-1)&(n-1)\\1&2&3&\cdots&(n-1)&n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}A=n.$$

$$\begin{matrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&&1&1\\&&&\ddots&&\\&&&&1&1\\0&0&0&&0&1\end{matrix}$$

或 $-(i)+(i+1)$. $i=n-1,n-2,\cdots,1$

从下往上消.

线性映射的像与核

$$\begin{cases}\varphi(\vec u+\vec v)=\varphi(\vec u)+\varphi(\vec v)\\ \varphi(\alpha\vec u)=\alpha\varphi(\vec u)\end{cases}$$
$\Updownarrow$

Def 1 设映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 满足对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec u,\vec v\in\mathbb{R}^n$. $\varphi(\alpha\vec u+\beta\vec v)=\alpha\varphi(\vec u)+\beta\varphi(\vec v)$

则称 φ 为线性映射（即可和线性运算（加法、数乘）交换的映射）

Def 2 设 $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为线性映射

(i) $\varphi(\mathbb{R}^n):=\{\vec w\in\mathbb{R}^m\mid\exists\,\vec v\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } \vec w=\varphi(\vec v)\}\subseteq\mathbb{R}^m$ 为像空间，记为 $\operatorname{Im}\varphi$ (image)

(ii) $\varphi^{-1}(\vec 0_m):=\{\vec v\in\mathbb{R}^n\mid\varphi(\vec v)=\vec 0\in\mathbb{R}^m\}$ 为核空间 $\subseteq\mathbb{R}^n$ 记为 $\ker\varphi$ (kernel)

注：1) $\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}^m$, $\ker\varphi\subseteq\mathbb{R}^n$ 均为线性子空间.

2) φ 是单射 $\Leftrightarrow\ker\varphi=\{\vec 0_n\}\Rightarrow n\le m$ ~~又 $m\ge n$, ∴ $m=n$. 单射 ⇒ 满射~~.

φ 是满射 $\Leftrightarrow\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^m\Rightarrow n\ge m$.

Thm $\dim(\ker\varphi)+\dim(\operatorname{Im}\varphi)=n$ (也可从齐次线性方程组角度理解).

Def 3 设 $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为线性映射. $\vec e^{(1)},\vec e^{(2)},\cdots,\vec e^{(n)}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基（$\vec e^{(j)}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\}j-1\\ \leftarrow j\text{行}\\ \}n-j\end{array}$）

设 $\varphi(\vec e^{(j)})=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 称 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(\varphi(\vec e^{(1)}),\cdots,\varphi(\vec e^{(n)}))$

为 φ 在标准基下的矩阵表示. 一般简称 A 为 φ 的矩阵.

Thm $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\longrightarrow\mathbb{R}^{m\times n}$ 是双射.

$\qquad\|$

$\{\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m\mid\varphi$ 为线性映射$\}$

注：1) $\operatorname{Im}(\varphi)=V_c(A)$ (列空间) $=\{\varphi(\vec x)\mid\forall\vec x\in\mathbb{R}^n\}$. $\vec x=\sum x_i\vec e_i$. ∴ $\varphi(\vec x)=\sum x_i\varphi(\vec e_i)$ 列向量的线性组合

联系线性方程组理解

2) $\ker\varphi$ 为 $\vec A^{(1)}x_1+\cdots+\vec A^{(n)}x_n=\vec 0$ 的解空间. 理解秩公式.

i.e. $\varphi(\vec x)=A\vec x$

则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 构成 $\ker\varphi$ 的一组基.

取 $\vec{\beta_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\beta_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. 显然 β_1, β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

则 $\varphi(\vec{\beta_1}) = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix}$, $\varphi(\vec{\beta_2}) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$ 构成 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基.

注: $\dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi) = \underbrace{\cancel{\dim(\ker\varphi)}}_{\dim(V_H)} + \mathrm{rank}A = \cancel{4}\, 5\ (n)$

$\dim(V_H)$ 由 A 为系数矩阵的齐次线性方程组解空间.

$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^n$ 无关 ⇏ $\varphi(\beta_1), \varphi(\beta_2)$ 无关. 但这里 β_1, β_2 与 $\ker(\varphi)$ 中一组基线性无关. 可保证像 $\varphi(\beta)$ 仍无关.

期中复习.

§1 线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$x_1, \cdots x_n$ 称未知元. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 为系数矩阵

$b_1, \cdots b_n$ 称为常数项.

如果 $b_1 = \cdots = b_n = 0$ 称为齐次线性方程组. 否则称为非齐次.

初等变换. I型(交换两行), II型(把某行乘一个倍数加到另一行), III型(某行乘倍数)

Thm. 1) 初等变换不改变方程的解.

2) 任何方程组均可通过初等变换转化为阶梯型方程组.

3) 方程组有无穷多解(相容且不确定) ⟺ 未知元个数 > 非0阶梯型方程个数

(不考虑不相容情形)

2 集合与映射

$f: X \longrightarrow Y$ 是一个映射 (如果 $\forall x \in X$ $\exists!\, y \in Y$ s.t. $f(x) = y$). 良定义.

像集: $\mathrm{Im}f = f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)\} = \{f(x) \mid \forall x \in X\}$

原像(逆像)集: ~~f^{-1}~~ 设 $V \subseteq Y$ 为子集. $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$

如果 $V = \{y\}$ 则 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

集合 非元素. f^{-1} 无意义.

f 是单射 ⟺ $(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$ ⟺ $(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$

f 是满射 ⟺ $f(X) = Y$ ⟺ $\forall y \in Y, \exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$

} 双射.

§3 等价关系(与商映射)

Def. 一个$\overset{S上的}{}$二元关系$\sim$(相当于 ~~☐☐~~ $S\times S$ 的子集，其中 S 为集合) 满足

1) 反身性 ($\forall\, x\in S$, $x\sim x$). 2) 对称性 ($x\sim y \Rightarrow y\sim x$) 3) 传递性($x\sim y, y\sim z \Rightarrow x\sim z$)

§4 置换.

Def. 有限集 $X=\{1,2,\cdots n\}$. $\sigma: X\to X$ 为双射 则称 σ 为一个置换.

记为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

循环分解 : $\sigma = \pi_1\pi_2\cdots\pi_s$ ~~☐~~ 不相交循环之积.

设 $l_i = \mathrm{len}(\pi_i)$ 为循环长度 则.

σ 的阶 (ie $\sigma^i = \mathrm{id}_X$ 的最小正整数 i) 为 $\mathrm{lcm}(l_1, l_2\cdots l_s)$

σ 的符号为 $(-1)^{\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)}$ (即可分解为奇/偶数个对换之积)

§5 整数的算数.

1. 素数: $p\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$: ~~满足~~ 因子只有 ±1 和 $\pm p$. (有无穷多的素数)

算数基本定理 : $\forall\, n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 都可分解为若干素数之积, 且不计序唯一.

2. gcd 与 lcm.

扩展欧几里得算法: 对 $a,b\in\mathbb{Z}$ 求 $u,v\in\mathbb{Z}$ s.t. $ua+vb=\gcd(a,b)$

(利用带余除法辗转相除求gcd.

$$r_0 = 1\cdot a + 0\cdot b = u_0a+v_0b$$
$$r_1 = 0\cdot a+1\cdot b = u_1a+v_1b$$
$$r_2 = r_0 - q_1r_1 = u_2a+v_2b$$
$$\vdots$$
$$\boxed{\gcd(a,b) = r_k = r_{k-2}-q_{k-1}r_{k-1} = u_ka+v_kb}$$
$$0 = r_{k-1}-q_kr_k$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_i = u_{i-2}-q_{i-1}u_{i-1} \\ (i=2,\cdots k) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \\ v_i = v_{i-2}-q_{i-1}v_{i-1} \end{cases}$$

$$\mathrm{lcm}(a,b) = \frac{a\cdot b}{\gcd(a,b)}$$

§6 向量空间

1. 线性相关性　设 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$

　线性相关 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 不全为0的 $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

　线性无关 $\Leftrightarrow$ 如果 $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$ 满足 $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$ 则 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$

Thm 如果 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 可由 $\vec{u_1},\cdots\vec{u_l}$ 线性表出 且 $k>l$ 则 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 线性相关.

2. 极大线性无关组 ~~(基)~~.

　设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$　$T\subseteq S$ 线性无关 且 $\forall\ \vec{v}\in S$ 可由 T 中元素线性表出. (保证 ~~(唯一)~~)

3. 线性子空间

　$V\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.\ \vec{u},\vec{v}\in V$　$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in V$ (即对加法.数乘封闭).

　$\langle\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\rangle := \{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v_i}\mid\alpha_i\in\mathbb{R}\}$. 是包含 $\{\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\}$ 的最小子空间.

4. 基与维数.

　线性子空间 $V\subseteq\mathbb{R}^n$　$\exists\ \vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$ 线性无关 s.t. $V=\langle\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}\rangle$

　则 $\dim V=k$ 称为 V 的维数.　(基不唯一)

　维数公式: $V_1,V_2\subseteq\mathbb{R}^n$ 为线性子空间 则:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

§7 矩阵的秩.

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$　$\operatorname{rank}A=\underset{(\text{行空间})}{\dim V_r(A)}=\underset{(\text{列空间})}{\dim V_c(A)}$　(高斯消去 得到阶梯形!

$\operatorname{rank}A+\underset{(\text{解空间})}{\dim V_H(A)}=\underset{\sim}{n}$ 变量个数.

§8 线性映射.

$\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 满足 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.\ \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$　$\varphi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\varphi(\vec{u})+\beta\varphi(\vec{v})$

$\exists!\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ s.t. $\varphi(\vec{v})=A\vec{v}$ (矩阵)

$\ker\varphi=V_H(A)$, $\operatorname{im}\varphi=V_c(A)$

$\dim\ker\varphi+\dim\operatorname{im}\varphi=n$ $\left(\begin{array}{l}\dim\ker\varphi=\dim V_H(A)\\ \dim\operatorname{im}\varphi=\operatorname{rank}A\end{array}\right)$

具体如何求 $\ker\varphi$ 和 $\operatorname{im}\varphi$ $\;=\langle\varphi(\vec{e_1}),\cdots,\varphi(\vec{e_n})\rangle$

$A\xrightarrow{\text{I}}$ 阶梯形

求齐次线性方程组解空间

$\langle\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}\rangle=\mathbb{R}^n$

$\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$　$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}$

$\varphi(\vec{x})=\sum x_i\varphi(\vec{e_i})=A\vec{x}$

$\mathbb{R}^n$中基的像确定 则可确定 $\mathbb{R}^n$ 中所有元的像