第九次作业

1. 设 F 是域. V, W 是 F 上的线性空间. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ 是 V 的一组基，$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ 是 W 的一组基. 设 $\phi(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3$, $\phi(\vec{v}_2) = -\vec{w}_1 + \vec{w}_2$

$\phi(\vec{v}_3) = 2\vec{w}_2 + \vec{w}_3$, $\phi(\vec{v}_4) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3$. 求 ϕ 在 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$; $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ 下的矩阵表示，$rank(\phi)$ 和 $\dim(\ker\phi)$.

解：$\left(\phi(\vec{v}_1), \phi(\vec{v}_2), \phi(\vec{v}_3), \phi(\vec{v}_4)\right) = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为 ϕ 的矩阵表示. $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\therefore rank(\phi) = \dim(im\phi) = rank(A) = 3$. $\dim(\ker\phi) = \dim V - rank\phi = 4 - 3 = 1$.

2. 设 $\phi: M_3(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_3(\mathbb{Q})$.

$A \longmapsto A + A^t$

(i). 证：ϕ 是线性算子. (ii). 求 $rank\phi$, $\dim(\ker\phi)$.

Pf: (i). 设 $A, B \in M_3(\mathbb{Q})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\phi(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B) + (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A + \beta B + \alpha A^t + \beta B^t$

$= \alpha(A + A^t) + \beta(B + B^t) = \alpha\phi(A) + \beta\phi(B) \in M_3(\mathbb{Q})$.

$\therefore \phi$ 是线性算子.

(ii). $\phi(A) = (A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t \Rightarrow A + A^t$ 是对称矩阵.

$\therefore im\phi \subseteq SM_3(\mathbb{Q})$. 又 $\forall B \in SM_3(\mathbb{Q})$, 则 $B^t = B$.

且 $B = \frac{B^t}{2} + \frac{B}{2}$. 令 $A = \frac{B}{2} \in M_3(\mathbb{Q})$, 则 $B = A^t + A = \phi(A)$

$\therefore SM_3(\mathbb{Q}) \subseteq im\phi$ $\therefore im\phi = SM_3(\mathbb{Q})$ $\therefore rank\phi = \dim(SM_3(\mathbb{Q})) = 3+2+1 = 6$.

$\therefore \dim(\ker\phi) = \dim(M_3(\mathbb{Q})) - rank(\phi) = 9 - 6 = 3$.

3. 设 n 阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 求 A 的正、负惯性指数.

解：

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \\ 3 & 3 & & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+3(n-1) & 3 & \cdots & 3 \\ 1+3(n-1) & 1 & \ddots & 3 \\ \vdots & & & \\ 1+3(n-1) & 3 & & 1 \end{vmatrix}=(3n-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 3 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(3n-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}=(3n-2)\cdot(-2)^{n-1}=\Delta_n.$$

$\Delta_0=1$， $\Delta_1=(3-2)\times(-2)^0=1\neq 0$ $\therefore \frac{\Delta_1}{\Delta_0}=1>0.$

对 $k=2,3,\cdots,n.$ $\Delta_k=(3k-2)\cdot(-2)^{k-1}\neq 0.$ 且 $\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}=(-2)\cdot\frac{3k-2}{3k-5}<0.$

由于 $A\sim_c\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}$，则 A 的正惯性指数为1.

负惯性指数为 $n-1$.

4. 设 A 正定. 证：对 $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}^+$，$k\in\mathbb{Z}$. λA^k 是正定矩阵.

Pf: 若 $k=0$. $\lambda A^k=\lambda E$. 由于 $\lambda>0$，则 $\lambda A^k=\lambda E$ 正定.

若 $k\in\mathbb{Z}^+$. 设 $k=2m$，$m\in\mathbb{Z}^+$. 则 $\lambda A^k=\lambda A^{2m}=(\sqrt{\lambda}A^m)(\sqrt{\lambda}A^m)$.

$\because A$ 对称. $\therefore(\sqrt{\lambda}A^m)^t=\sqrt{\lambda}(A^m)^t=\sqrt{\lambda}(A^t)^m=\sqrt{\lambda}A^m$

又 $\because A$ 正定. $\therefore|A|\neq 0$. $\therefore|\sqrt{\lambda}A^m|\neq 0$ $\therefore\sqrt{\lambda}A^m$ 可逆.

设 $B=\sqrt{\lambda}A^m$. 则 $\lambda A^k=B^tB$，且 B 可逆 $\therefore\lambda A^k$ 正定.

设 $k=2m+1$，$m\in\mathbb{Z}^+$. 则 $\lambda A^k=(\sqrt{\lambda}A^m)\cdot A\cdot(\sqrt{\lambda}A^m)=B^tAB$. $(B=\sqrt{\lambda}A^m)$.

由于 A 正定，则 $\exists\ P$ 可逆 st. $A=P^tP$.

$\therefore\lambda A^k=B^tP^tPB=(PB)^t(PB)$，且 PB 可逆. $\therefore\lambda A^k$ 正定.

若 $k\in\mathbb{Z}^-$. $\lambda A^k=\lambda(A^{-1})^{-k}$. 则 $-k\in\mathbb{Z}^+$.

$\because A$ 正定，$\therefore A^{-1}$ 正定 $(A=P^tP\Rightarrow A^{-1}=P^{-1}(P^t)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^t)$

$\therefore\lambda A^k=\lambda(A^{-1})^{-k}$ 正定 (由 $k\in\mathbb{Z}^+$ 情况的证明可知). 四.

相似.

设 V 是域 F 上的有限维线性空间. $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 和 $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n\}$ 是 V 的两组基

设 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$, 其中 $P\in GL_n(F)$ 为转换矩阵.

设 $\varphi\in\mathcal{L}(V)=\mathrm{Hom}(V,V)$ 且 φ 在 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n\}$ 下矩阵分别为 A,B

则 $(\varphi(\vec{\varepsilon}_1),\cdots,\varphi(\vec{\varepsilon}_n))=\underline{(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)}B=\underline{(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)PB}$

$=\left(\varphi((\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P^{(1)}),\cdots,\varphi((\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P^{(n)})\right).$

$=\left((\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))P^{(1)},\cdots,(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))P^{(n)}\right)$

$=\underline{(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))P}=\underline{(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)AP}$

由 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 线性无关. 知 $AP=PB\Rightarrow B=P^{-1}AP$.

Def. $A,B\in M_n(F)$ 若 $\exists P\in GL_n(F)$, s.t. $B=P^{-1}AP$, 则 $B\sim_s A$ (相似).

注: 线性算子在2组基下的矩阵是相似的. 相似是等价关系.

Prop. 相似不变量. 设 $\mathrm{char}(F)=0$. $A,B\in M_n(F)$ 且 $A\sim_s B$.

则 (1). $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,B$ (2). $tr(A)=tr(B)$. (3). $|A|=|B|$.

eg1. 设 V,W 为域 F 上的有限维线性空间 $\varphi: V\longrightarrow W$ 线性映射.

设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\in V$, s.t $\{\varphi(\vec{v}_1),\cdots,\varphi(\vec{v}_r)\}$ 构成 $\mathrm{im}\,\varphi$ 的一组基.

则 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 线性无关 且 $V=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\oplus\ker\varphi$

再设 $\{\vec{v}_{r+1},\cdots,\vec{v}_n\}$ 构成 $\ker\varphi$ 的一组基. 且由 $\{\vec{w}_i=\varphi(\vec{v}_i)\mid i=1,\cdots,r\}$ 可扩充为 W 的一组基 $\{\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_r,\vec{w}_{r+1},\cdots,\vec{w}_m\}$. 求 φ 在 $\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\}$; $\{\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_m\}$ 下的矩阵.

Pf: 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in F$. s.t $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\vec{v}_i=\vec{0}$

则 $\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_r\vec{v}_r)=\alpha_1\varphi(\vec{v}_1)+\cdots+\alpha_r\varphi(\vec{v}_r)=\vec{0}$

$\because$ $\varphi(\vec{v}_1),\cdots,\varphi(\vec{v}_r)$ 线性无关. $\therefore$ $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$ $\therefore$ $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 线性无关.

设 $\forall\vec{u}\in\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\cap\ker\varphi$. 则 $\vec{u}=\sum_{i=1}^{r}\beta_i\vec{v}_i$, $\beta_1,\cdots,\beta_r\in F$

且 $\varphi(\vec{u})=\sum_{i=1}^{r}\beta_i\varphi(\vec{v}_i)=\vec{0}$. 由于 $\varphi(\vec{v}_1),\cdots,\varphi(\vec{v}_r)$ 线性无关. $\beta_1=\cdots=\beta_r=0$

则 $\vec{u}=\vec{0}$. 因此, $\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\cap\ker\varphi=\{\vec{0}\}$.

又 $\dim V = \dim \operatorname{im}\varphi + \dim \ker\varphi = \dim\langle \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle + \dim\ker\varphi = \dim(\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\oplus\ker\varphi)$

且 由 $\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle \subseteq V$，$\ker\varphi \subseteq V$，则 $\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\oplus\ker\varphi\subseteq V$

则 $V = \langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r\rangle\oplus\ker\varphi$.

$$\varphi(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r,\vec{v}_{r+1},\cdots,\vec{v}_n) = (\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_r,0,\cdots,0) = (\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_r,\vec{w}_{r+1},\cdots,\vec{w}_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

即 矩阵表示为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

核像分解. 核核分解.

Thm 1. 设 $\varphi = \mathcal{L}(V)$ 则 $V = \operatorname{im}\varphi\oplus\ker\varphi \iff \operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(\varphi^2)$.

Thm 2. 设 $f\in F[t]$ 有因式分解：$f = p\cdot q$ 且 $\gcd(p,q)=1$

设 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$ 且 $f(\varphi)=0$. 则 $V = \ker(p(\varphi))\oplus\ker(q(\varphi))$.

eg2. 设 $\operatorname{char}(F)\neq 2$ 且 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\varphi^2 = id$. 证明：$\operatorname{rank}(\varphi+id)+\operatorname{rank}(\varphi-id) = \dim V$.

Pf: 设 $f(t) = t^2-1 = \underbrace{(t-1)}_{p}\underbrace{(t+1)}_{q}\in F[t]$. 且 $\gcd(p,q)=1$，$f(\varphi)=0$.

由核核分解定理. $\ker(\varphi+id)\oplus\ker(\varphi-id) = V$.

$\Rightarrow \dim\ker(\varphi+id) + \dim\ker(\varphi-id) = \dim V$

$\Rightarrow \dim V - \operatorname{rank}(\varphi+id) + \dim V - \operatorname{rank}(\varphi+id) = \dim V$

$\Rightarrow \dim V = \operatorname{rank}(\varphi+id) + \operatorname{rank}(\varphi-id)$. $\square$.

$(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n)) = (\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)A_{m\times n}$

$\dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim(\langle\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n)\rangle)$

$= \operatorname{rank} A$

期中复习.

一. 抽象线性空间. 设 V 是域 F 上的线性空间.

1. 子空间. $U\subseteq V$ 满足 $\forall\, \vec{u}_1,\vec{u}_2\in U, \alpha,\beta\in F$. $\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2\in U$.

$U_1, U_2\subseteq V$ 子空间

eg: U_1+U_2, $U_1\cap U_2$. $U_1\cup U_2$ 是子空间 $\Leftrightarrow U_1\subseteq U_2$ 或 $U_2\subseteq U_1$.

维数公式: $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$.

2. 直和. $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_m \Leftrightarrow \forall\, \vec{u}\in U.\ \exists!\ \vec{u}_i\in U_i$, s.t. $\vec{u}=\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_m$

$\Leftrightarrow U=U_1+\cdots+U_m$ 且 $\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_m=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{u}_1=\vec{u}_2=\cdots=\vec{u}_m=\vec{0}$

$\Leftrightarrow U=U_1+\cdots+U_m$ 且 $U_i\cap\left(\sum_{j\neq i}U_j\right)=\{\vec{0}\}$.

$\Leftrightarrow U=U_1+\cdots+U_m$ 且 $\dim U=\dim U_1+\cdots+\dim U_m$.

二. 线性映射. 设 V, W 是域 F 上的线性空间.

1. 定义: $\varphi: V\longrightarrow W$. 满足 $\forall\, \alpha,\beta\in F$, $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$. $\varphi(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha\varphi(\vec{v}_1)+\beta\varphi(\vec{v}_2)$.

2. 像与核. $\operatorname{im}\varphi=\{\varphi(\vec{v})\mid\forall\,\vec{v}\in V\}=\varphi(V)\overset{\text{子空间}}{\subseteq}W$. φ 满 $\Leftrightarrow \operatorname{im}\varphi=W\Leftrightarrow \operatorname{rank}A_\varphi=m$

$\ker\varphi=\{\vec{v}\in V\mid\varphi(\vec{v})=\vec{0}\}\overset{\text{子空间}}{\subseteq}V$ φ 单 $\Leftrightarrow \ker\varphi=\{\vec{0}\}\Leftrightarrow \operatorname{rank}A_\varphi=n$

$$\dim V=\begin{array}[t]{c}\dim\operatorname{im}\varphi\\ \shortparallel\\ \operatorname{rank}\varphi\\ \shortparallel\\ \operatorname{rank}A_\varphi\end{array}+\begin{array}[t]{c}\dim\ker\varphi\\ \shortparallel\\ \dim V_A.\end{array}$$

其中 $(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)A_\varphi$

$\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\}$ 分别为 V, W 的一组基.

$\left(\dim\operatorname{im}\varphi=\dim\langle\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n)\rangle=\operatorname{rank}A_\varphi=\operatorname{rank}\varphi\right)$.

三. 基变换与坐标变换.

设 $\{\vec e_1,\cdots,\vec e_n\}$ 与 $\{\vec e_1',\cdots,\vec e_n'\}$ 为 V 的两组基.

即 $\vec e_i' = (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)\vec p^{(i)}$

基变换: $\exists\ P\in GL_n(F)$. 转换矩阵. s.t. $(\vec e_1',\cdots,\vec e_n') = (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)P$.

坐标变换: $\forall\ \vec v\in V$. $\vec v = \alpha_1\vec e_1+\cdots+\alpha_n\vec e_n = \alpha_1'\vec e_1'+\cdots+\alpha_n'\vec e_n'$

即 $\vec v = (\vec e_1',\cdots,\vec e_n')\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix} = (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)P\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$

$= (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \xRightarrow{\vec e_1,\cdots,\vec e_n\text{线性无关}} P\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

四. 双线性型. 设 V 是 F 上的有限维线性空间. $\{\vec e_1,\cdots,\vec e_n\}$ 为 V 的一组基.

1. 定义: $f: V\times V\longrightarrow F$. 满足 $\forall\ \vec x_1,\vec x_2,\vec y\in V$, $\alpha,\beta\in F$.

$f(\alpha\vec x_1+\beta\vec x_2,\vec y) = \alpha f(x_1,y)+\beta f(\vec x_2,\vec y)$

$f(\vec y,\alpha\vec x_1+\beta\vec x_2) = \alpha f(y,\vec x_1)+\beta f(y,\vec x_2)$.

2. 一一对应 $\mathcal{L}_2(V,F) \triangleq \{f: V\times V\to F \mid 双线性\}$ $\xleftrightarrow{1:1}$ $M_n(F)$ $\xleftrightarrow{1:1}$ $\mathcal{L}(V)\triangleq\{\varphi: V\to V\mid 线性算子\}$.

$f \longmapsto A_f = (f(\vec e_i,\vec e_j))_{n\times n} \longmapsto \varphi: V\to V$. $[\vec v\mapsto A\vec v]$.

$f(\vec x,\vec y) = \vec x^t A\vec y \longleftarrow A = (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)^{-1}(\varphi(\vec e_1),\cdots,\varphi(\vec e_n)) \longleftarrow \varphi$ $\quad (\varphi(\vec e_1),\cdots,\varphi(\vec e_n)) = (\vec e_1,\cdots,\vec e_n)\underline{\underline{A}}$

3. 合同. 双线性 f 在不同基下的矩阵合同. $\exists\ P\in GL_n(F)$. s.t. $B = P^tAP$. i.e. $B\simeq_c A$

五. 二次型.

1. 定义: $q: V\longrightarrow F$. 满足 $q(\vec x) = q(-\vec x)$. 且 $f(x,y) = \frac{1}{2}(q(\vec x+\vec y)-q(\vec x)-q(\vec y))$ (对称)双线性型.

2. 一一对应. $Q(V,F) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{L}_2^+(V,F) \triangleq \{f\in\mathcal{L}_2(V,F)\mid f(x,y)=f(y,x)\} \xleftrightarrow{1:1} SM_n(F) \xleftrightarrow{1:1} \{F[x_1,\cdots,x_n]$中齐二次多项式$\}$

$q \longmapsto \frac{1}{2}(q(\vec x+\vec y)-q(\vec x)-q(\vec y)) = f(\vec x,\vec y) \longmapsto A = (f(\vec e_i,\vec e_j))_{n\times n} \longmapsto P = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

$q(\vec x) = f(\vec x,\vec x) \longleftarrow f(\vec x,\vec y) = \vec x^tA\vec y \longleftarrow A = (a_{ij})_{n\times n} \longleftarrow \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

$= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$

3. 标准型.

Thm. $\mathrm{char}(F)\neq 2$. $\forall\ A\in SM_n(F)$. $\exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in F\setminus\{0\}$. s.t. $A\sim_c\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$.

$F=\mathbb{C}$. $A\sim_c\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}$. 其中 $r=\mathrm{rank}(A)$.

$F=\mathbb{R}$. $A\sim_c\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}$ s: 正惯性指数 t: 负惯性指数 (s,t): 签名.

4. 如何求对称矩阵的标准型(规范型)和规范基.

(1). 消元法. $(A\,\vdots\,E_n)\xrightarrow[\text{对应列变换}]{\text{初等行变换}}(\Lambda\,\vdots\,\tilde{P})$. 令 $P=\tilde{P}^t$. 则 $P^tAP=\Lambda$

(2). 降维法.

(3). 配方法. $p(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$

i). 若 $\exists\ a_{ii}\neq 0$. 设 $a_{11}\neq 0$. 令 $y_1=x_1+\sum_{j=2}^n\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j$ 且 $y_i=x_i\ (i=2,\cdots,n)$.

ii). 若 $\forall\ a_{ii}=0$. $\exists\ a_{ij}\neq 0$. 设 $a_{12}\neq 0$. 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_i=y_i\ (i=3,\cdots,n)\end{cases}$ 再用 i).

(4). Jacobi 公式. 设 Δ_k 为 A 的 k 阶顺序主子式, $k=1,\cdots,n$.

若 $\Delta_k\neq 0$. $(k=1,\cdots,n)$. 则 $A\sim_c\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}&&&\\&\frac{\Delta_2}{\Delta_1}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\end{pmatrix}$.

六. 正定二次型. 设 q 的签名为 (s,t), q 为二次型. $q=\vec{x}^tA\vec{x}$, 这里 A 对称.

Thm. (1). q正定 $\Leftrightarrow$ A正定 $\Leftrightarrow$ $s=n$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$. s.t. $A=P^tP$

$\Leftrightarrow\ \forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}^tA\vec{x}>0$ $\Leftrightarrow$ A 的所有(顺序)主子式 >0.

(2). q半正定 $\Leftrightarrow$ A半正定 $\Leftrightarrow$ $t=0$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ B\in M_n(\mathbb{R})$. s.t. $A=B^tB$.

$\Leftrightarrow\ \forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}\geq 0$ $\Leftrightarrow$ A 的所有主子式 ≥ 0.

七. 线性算子. $V\longrightarrow V$ 的线性映射

1. 相似: $A\sim_s B$. $\Leftrightarrow$ $\exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$. s.t. $A=P^{-1}BP$.