第十三次作业

1. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 求特征值，特征向量，特征子空间和 A^k $(k\in\mathbb{N})$.

解: $\chi_A=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-2&1\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

$\therefore$ 特征值为 $\lambda_1=2$. (2重). $\lambda_1=1$. (1重).

$(\lambda_1E-A)\vec{x}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow V^2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

$(\lambda_2E-A)\vec{x}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow V^1=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

$\therefore \mathbb{R}^3=V^2\oplus V^1$ $\therefore$ A 可对角化.

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\triangleq\Lambda$. $\therefore A^k=P\Lambda^kP^{-1}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&&&\\a_1&a_2&\cdots&a_0\end{pmatrix}$ 其中 $a_0,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$. 证明

(i). A在 $\mathbb{C}$ 上可对角化

(ii) $\forall B\in M_n(\mathbb{C})$ 可对角化，则 $\exists$ 形如A的矩阵相似于B.

Pf: (i). 由上节习题课结论 A有n个线性无关的特征向量 $\vec{v}_k=\begin{pmatrix}1\\\varepsilon_k\\\vdots\\\varepsilon_k^{n-1}\end{pmatrix}$, $\varepsilon_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

$k=0,1,\cdots,n-1$.

于是 A可对角化. 令 $V=(\vec{v}_0,\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-1})$, 则 $V^{-1}AV=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_k=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\varepsilon_k^j$, $k=0,1,\cdots,n-1$.

(ii). $\forall B\in M_n(\mathbb{C})$ 若可对角化，则 $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$, s.t. $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}b_0&&&\\&b_1&&\\&&\ddots&\\&&&b_{n-1}\end{pmatrix}$

其中 $b_i\in\mathbb{C}$. $(i=0,\cdots,n-1)$.

不考虑排序时 别与合同混.

若可对角化. 则对角矩阵唯一. 合同: $A\in M_n(\mathbb{C})$. $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$. s.t. $A=P^t\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}P$.

$\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ (n次单位根)，(以 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为变量求解线性方程组)

设 $\sum_{j=0}^{n-1} a_j \varepsilon_k^j = b_k$，$k = 0, 1, \cdots, n-1$ 即 $(a_0, \cdots, a_{n-1})V = (b_0, \cdots, b_{n-1})$.

∵ V 可逆，∴可求得 $(a_0, \cdots, a_{n-1}) = (b_0, \cdots, b_{n-1})V^{-1}$ 由 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 构造得到 A.

则由(1)知 $A \sim_s \Lambda \sim_s B$ ▨.

3. 证明：$\forall A, B \in M_n(K)$，则 AB 与 BA 的特征多项式相同.举例极小多项式不同

Pf：由§7.T8. 若 A, B 中有一个矩阵非退化，则 $AB \sim_s BA \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(方1) $(C \sim_s D \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K),\ s.t.\ P^{-1}CP = D \Rightarrow |\lambda E - C| = |\lambda E - PDP^{-1}| = |P(\lambda E - D)P^{-1}|$
$= |\lambda E - D|)$.

构造非退化阵，用简单情形

若 A, B 均退化. 设 $\tilde{B} = sE + B$ (s 是未定元).

则 $|\tilde{B}| = |sE + B| = s^n + \cdots \in K[s]$ 非零 ∴ $\tilde{B} \in M_n(K(s))$ 可逆.

则 $A\tilde{B} \sim_s \tilde{B}A \Rightarrow |\lambda E - A\tilde{B}| = |\lambda E - \tilde{B}A|$ 特征多项式相同

即 设 $f(s) = |\lambda E - sA - AB| = |\lambda E - sA - BA|$. 是关于 s 的多项式.

∴ $f(0) = |\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$. (赋值同态)

(方2). (证 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$，即证 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$).

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ \lambda A & \lambda E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ 0 & \lambda E_n - AB \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ \lambda A & \lambda E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n - BA & B \\ 0 & \lambda E_n \end{pmatrix} \quad (2).$$

$\det(1) = \det(2) \Rightarrow \lambda^n \cdot |\lambda E_n - AB| = \lambda^n \cdot |\lambda E_n - BA|$.

λ 是变元不为0. $\Rightarrow |\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA| \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$. ▨.

eg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

则 $\mu_{AB} = t^2$，$\mu_{BA} = t$. $\mu_{AB} \neq \mu_{BA}$

但 $\chi_{AB} = t^2 = \chi_{BA}$.

(陈 P65. T14). 幂等方阵 ($A^2=A$) 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r=\mathrm{rank}(A)$.

特别地，若 $\mathrm{char}(F)=0$，则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$.

Pf: 令 $f(t)=t^2-t=t(t-1)\in F[t]$ 则 $\gcd(t,t-1)=1$.

1. 设 $\mathcal{A}: F^n \longrightarrow F^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ 则 $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(F^n)$，且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 即 $f(\mathcal{A})=0$.

由核核分解定理，$F^n=\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})\oplus\ker(\mathcal{A})$.

设 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m$ 为 $\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})$ 的组基，$\vec{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 为 ~~$\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})$~~ $\ker(\mathcal{A})$ 的一组基.

则 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 构成 F^n 的一组基.

满足 $\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i)=\vec{\varepsilon}_i$，$i=1,\cdots,m$；$\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i)=\vec{0}$，$i=m+1,\cdots,n$.

则令 $V=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)$. 有 $V^{-1}AV=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 即 $A\sim_s\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

又 $\because$ tr 是相似不变量. $\therefore \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}=r=\mathrm{rank}(A)$ ☐.

Rmk. $A^2=A \iff A\sim_s\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r=\mathrm{rank}(A)$.

4. 证明：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 证明：$\mathcal{A}^2=\mathcal{A} \iff \mathrm{rank}\,\mathcal{A}+\mathrm{rank}(\mathcal{E}-\mathcal{A})=n\ (=\dim V)$

Pf: "$\Rightarrow$" 设 $f(t)=t^2-t=t(t-1)\in F[t]$ 则 $\gcd(t,t-1)=1$，$f(\mathcal{A})=0$.

由核核分解定理，$V=\ker\mathcal{A}\oplus\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})$.

$\therefore n=\dim V=\dim\ker\mathcal{A}+\dim\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})=n-\dim\mathrm{im}\mathcal{A}+n-\dim\mathrm{im}(\mathcal{A}-\mathcal{E})$

即 $n=\mathrm{rank}\,\mathcal{A}+\mathrm{rank}(\mathcal{E}-\mathcal{A})$.

"$\Leftarrow$" (方1). 由 $n=\mathrm{rank}\,\mathcal{A}+\mathrm{rank}(\mathcal{E}-\mathcal{A})$ 知 $n=\dim\ker\mathcal{A}+\dim\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$.

转为ker的角度易证. 下证 $V=\ker\mathcal{A}\oplus\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$. 只需证 $\ker\mathcal{A}\cap\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})=\{\vec{0}\}$.
直和不是并的关系

$\forall \vec{x}\in\ker\mathcal{A}\cap\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$. 则 $\mathcal{A}\vec{x}=\vec{0}$，$(\mathcal{E}-\mathcal{A})(\vec{x})=\vec{x}-\mathcal{A}\vec{x}=\vec{0}$

$\therefore \vec{x}=\mathcal{A}\vec{x}=\vec{0}$ $\quad\therefore \ker\mathcal{A}\cap\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})=\{\vec{0}\}$ $\quad\therefore V=\ker\mathcal{A}\oplus\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$.

再证 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. $\forall \vec{x}\in V$. $\exists\ \vec{y}\in\ker\mathcal{A}, \vec{z}\in\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$, s.t. $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$

则 $\mathcal{A}\vec{x}=\mathcal{A}\vec{y}+\mathcal{A}\vec{z}=\vec{0}+\vec{z}$，$\mathcal{A}^2(\vec{x})=\mathcal{A}^2(\vec{y})+\mathcal{A}^2(\vec{z})=\mathcal{A}(\mathcal{A}\vec{y})+\mathcal{A}(\mathcal{A}\vec{z})$
$=\vec{0}+\mathcal{A}\vec{z}=\vec{z}$

$\therefore \mathcal{A}^2\vec{x}=\mathcal{A}\vec{x}$，$\therefore \mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ ☐.

(⇐2). 类似得到 $V=\ker(\mathcal{A})\oplus\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$.

设 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m$ 为 $\ker(\mathcal{E}-\mathcal{A})$ 的基，$\vec{u}_{m+1},\cdots,\vec{u}_n$ 为 $\ker\mathcal{A}$ 的基.

则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$. 由上题知，$\mathcal{A}$ 对应的矩阵幂等

$\therefore \mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. ■

回忆：Prop 7.2. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$.

(1). $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一

(2). 若 $p(t)$ 是关于 $\mathcal{A},\vec{v}$ 的零化多项式，则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\mid p$.

(3). $\dim(F[\mathcal{A}]\vec{v})=\underset{d}{\underset{\shortparallel}{\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}}}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\cdots,\mathcal{A}^{d-1}\vec{v}$ 是 $F[\mathcal{A}]\vec{v}$ 的一组基.

Thm 8.2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解.

其中 $p_1,\cdots,p_k\in F[t]\setminus F$ 不可约、首一、两两互素，$m_1,\cdots,m_k\in\mathbb{Z}^+$. 则有

(1). $V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_k)$，其中 $V(p_i)=\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$, $i=1,\cdots,k$.

(2). $p_i^{m_i}$ 是 $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式，$i=1,\cdots,k$.

(3). $p_i(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{i-1})\oplus V(p_{i+1})\oplus\cdots\oplus V(p_k)$ 上的限制是双射. $i=1,\cdots,k$.

lemma 8.2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. U 是 $\mathcal{A}$-子空间，$p\in F[t]$. 则 U 也是 $p(\mathcal{A})$-子空间.

eg. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 则

(i). $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t)\mid\mu_{\mathcal{A}}(t)$　　(ii). $\exists\,\vec{w}\in V$, s.t. $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}=\mu_{\mathcal{A}}$.

Pf: (i). $\because \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0$. $\therefore \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

$\therefore \mu_{\mathcal{A}}$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式，由 Prop 7.2 (2).

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\mid\mu_{\mathcal{A}}$.

(ii). Case 1. 设 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$，其中 $p\in F[t]\setminus F$ 首一、不可约，$m>0$.

反证，$\forall\,\vec{v}\in V$, $\deg(\mu_{\mathcal{A},\vec{v}})<\deg(\mu_{\mathcal{A}})$.

则由 (i) 知，$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\mid p^{m-1}$，于是 $p^{m-1}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$. 对 $\forall\,\vec{v}$ 成立

$\therefore p^{m-1}(\mathcal{A})=0$　$\therefore \mu_{\mathcal{A}}=p^m\mid p^{m-1}$ ($\rightarrow\leftarrow$).

再考虑一般情形.

Case2. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$ 其中 $p_1,\cdots,p_k \in F[t]\setminus F$ 首一,不可约,两两互素.

由 Thm 8.2 (i), $V = V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_k)$, 其中 $V(p_i) = \ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$, $i=1,\cdots,k$. (则 $V(p_i)$ 是 $\mathcal{A}_i$-子空间, $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(V(p_i))$.)

由直和分解到局部再构造整体

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V(p_i)}$, $i=1,\cdots,k$, 由 Thm 8.2 (ii), $p_i^{m_i} = \mu_{\mathcal{A}_i}$

由 Case1 知, $\exists\, \vec{w}_i \in V(p_i)$, s.t. $\mu_{\mathcal{A}_i,\vec{w}_i} = \mu_{\mathcal{A}_i} = p_i^{m_i}$, $i=1,\cdots,k$.

令 $\vec{w} = \vec{w}_1 + \cdots + \vec{w}_k \in V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_k)$.

则 $\vec{0} = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A})(\vec{w}) = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A})(\vec{w}_1) + \cdots + \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A})(\vec{w}_k)$

$$= \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}_1)(\vec{w}_1) + \cdots + \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}_k)(\vec{w}_k)$$

$\because$ $V(p_i)$ 是 $\mathcal{A}_i$-子空间, 由 Lemma 8.2,

$\therefore$ $V(p_i)$ 是 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}_i)$-子空间, $\therefore$ $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}_i)(\vec{w}_i) \in V(p_i)$.

由直和可知, $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}_i)(\vec{w}_i) = \vec{0}$ $\therefore$ $\mu_{\mathcal{A}_i,\vec{w}_i} \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$, $i=1,\cdots,k$.

$\therefore$ $\mathrm{lcm}(p_1^{m_1},\cdots,p_k^{m_k}) \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$ 即 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k} \mid \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$

又 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} \mid \mu_{\mathcal{A}}$ $\therefore$ $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} = \mu_{\mathcal{A}}$. ▥.

不变子空间与特征向量.

设 V 是 F 上 n 维线性空间. $\mathcal{L}(V)$ 为算子空间 (n^2 维) —— F-代数.

Def 1 不变子空间.

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U \subseteq V$ 为子空间. 若 $\varphi(U) \subseteq U$ 则称 U 为 φ-(不变)子空间.

记 $\varphi|_U : U \longrightarrow U$ 为 φ 在 U 上的限制 (线性算子)

$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u})$

eg. $\forall f \in F[t]$ $\ker(f(\varphi))$ 和 $\operatorname{im}(f(\varphi))$ 都是 φ-子空间.

设 $\psi \in \mathcal{L}(V)$ 若 $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ 则 $\ker\psi$ 和 $\operatorname{im}\psi$ 都是 φ-子空间.

矩阵表示: 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. U 为 φ-子空间 设 $U = \langle \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_m \rangle$ 为基底

且可扩充为 V 的一组基底 $\langle \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n, \vec{e}_{m+1}, \cdots \vec{e}_n \rangle$ 则

φ 在基 $\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 其中 A_1 为 $\varphi|_U$ 在 $\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_m$ 下矩阵.

若 $W = \langle \vec{e}_{m+1}, \cdots \vec{e}_n \rangle$ 也是 φ-子空间 则 φ 在基 $\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ 下的矩阵

为 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 其中 $\varphi|_W$ 在 $\vec{e}_{m+1} \cdots \vec{e}_n$ 下矩阵为 A_2 此时 $V = U \oplus W$.

Thm 1 (1) 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. φ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$

$\iff V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$, 其中 W_i 为 φ-子空间.

特别地. $\varphi|_{W_i}$ 在对应基底下的矩阵为 A_i ($i = 1, 2 \cdots m$)

(2) 若 $V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$, 其中 W_i 为 φ-子空间 则 $\mu_\varphi = \operatorname{lcm}(\mu_{\varphi|_{W_1}}, \cdots \mu_{\varphi|_{W_m}})$

Def 2 特征向量，特征值，特征子空间，特征多项式

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 若 $\exists\ \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ s.t. $\vec{v}$ 与 $\varphi(\vec{v})$ 线性相关

即 $\exists\ \lambda \in F$ s.t. $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$，则称 $\vec{v}$ 为 φ 的特征向量，λ 为对应特征值.

记 $V^{\lambda} := \{ \vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \}$ 为 φ 关于 λ 的特征子空间（φ-子空间）

称 $\dim_F V^{\lambda}$ 为 φ ※ 在特征值 λ 处（关于 λ）的几何重数.

注：$\vec{v}$ 是 φ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ $\langle \vec{v} \rangle$ 是 φ-子空间.

设 φ 在某组基下的矩阵为 A 称 $\chi_{\varphi} = \chi_A := |tE_n - A| \in F[t]$

为特征多项式.（注：特征多项式是 n 次首 1 多项式）

注：设 φ 在另组基下矩阵为 B 则 $\exists\ P \in GL_n(F)$ s.t. $B = P^{-1}AP$

于是 $\chi_A = |tE_n - A| = |P^{-1}| \cdot |tE_n - A| \cdot |P| = |tE_n - B| = \chi_B$

Thm 2 $\lambda \in F$ 是 φ 的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ 是 χ_{φ} 的根

称 λ 在 χ_{φ} 中的重数为 φ 关于 λ 的代数重数.

★ $1 \leq$ 几何重数 $\leq$ 代数重数（对任意特征值成立）.

Def 3 可对角化

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 若 φ 在某组基下的矩阵是对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 则称 φ 可对角化.

Thm 3 φ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ φ 的特征向量构成 V 的一组基

$\Longleftrightarrow$ φ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ χ_{φ} 的根 $\in F$ 且几何重数 $=$ 代数重数

$\Longleftrightarrow$ $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{\lambda_i}$

$\Longleftrightarrow$ μ_{φ} 的根两两不同.

Thm 4 (Cayley-Hamilton) $\mu_{\varphi} \mid \chi_{\varphi}$ 且 $\mathrm{sqfr}(\chi_{\varphi}) \mid \mu_{\varphi}$.