第十四次作业.

1. 席 P_{71} 1. (1) $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-3&-1&1\\0&t-2&0\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-3)\cdot(t-2)(t-1)+(-1)^{3+1}(-1)^2\cdot(t-2)$

$=(t-2)(t^2-4t+3+1)$

$\therefore\ \chi_A=(t-2)^3 \Rightarrow t-2\mid\mu_A$ 且 $\mu_A\mid(t-2)^3$

$A-2E=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\neq 0$ $\quad (A-2E)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \mu_A=(t-2)^2$

(2) $A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&7&-4\end{pmatrix}$ $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-4&2&-2\\5&t-7&5\\6&-7&t+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-4&2&0\\5&t-7&t-2\\6&-7&t-3\end{vmatrix}=\begin{matrix}(t-4)\left[(t-7)(t-3)+7(t-2)\right]\\-2\left[5(t-3)-6(t-2)\right]\end{matrix}$

$=(t-4)(t^2-10t+21+7t-14)-2(5t-15-6t+12)=(t-4)(t^2-3t+7)+2(t+3)$

$=t^3-7t^2+19t-28+2t+6=t^3-7t^2-21t-22=(t-2)(t^2-5t+11)$

$\because$ 特征值不同 $\therefore\ \mu_A=(t-2)(t^2-5t+11)$

2. (1) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{100}$ (2) $\begin{pmatrix}7&-4\\14&-8\end{pmatrix}^{66}$

解(1) 由十二次作业(席P66. 21(3))可知 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 的特征值为 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$ 对应特征向量分别为 $\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ $\therefore\ A=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta}&\\&e^{-i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}^{-1}$

$\Rightarrow A^{100}=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i(100\theta)}&\\&e^{-i(100\theta)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(100\theta)&-\sin(100\theta)\\\sin(100\theta)&\cos(100\theta)\end{pmatrix}$

[另法] $\chi_A=t^2-2\cos\theta\, t+1$ 设 $t^{100}=q(t)\cdot\chi_A(t)+r(t)$ $\deg(r)<\deg(\chi_A)$

设 $r(t)=at+b$ $\Rightarrow\begin{cases}(e^{i\theta})^{100}=ae^{i\theta}+b\\(e^{-i\theta})^{100}=ae^{-i\theta}+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sin(100\theta)}{\sin\theta}\\b=\cos(100\theta)-\dfrac{\sin(100\theta)\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}$

$\Rightarrow A^{100}=r(A)=\begin{pmatrix}\cos100\theta&-\sin100\theta\\\sin(100\theta)&\cos(100\theta)\end{pmatrix}$ [法三] 归纳法+加角公式.

(2) 令 $B=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 14 & -8\end{pmatrix}$ $\quad \chi_B = |tE-B| = \begin{vmatrix}t-7 & 4\\ -14 & t+8\end{vmatrix} = (t-7)(t+8)+56 = t^2+t$

∴ 特征值为 0 和 -1. 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

∴ $B = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}^{-1}$ 而 $\begin{pmatrix}0 & \\ & -1\end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \\ & -1\end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix}0 & \\ & -1\end{pmatrix}$

∴ $B^{66} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-7 & 4\\ -14 & 8\end{pmatrix}$ $(= -B)$

[另法] $t^{66} = q(t)\cdot \chi_B(t) + r(t)$ $\quad \deg(r) < \deg(\chi_B)$ 设 $r(t) = at+b$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = b \\ 1 = -a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow B^{66} = -B = \begin{pmatrix}-7 & 4\\ -14 & 8\end{pmatrix}$.

3. 补 P82.7. $A^N = E \iff$ A可对角化且特征值均为 N 次单位根.

Pf (⇒) $f(t) = t^N - 1$ 是 A 的零化多项式 $\Rightarrow \mu_A \mid f(t)$ ∵ $f(t)$ 的根两两不同

∴ μ_A 的根两两不同 ⇒ A可对角化 又∵特征值也是 μ_A 的根 ∴ 均为N次单位根.

(⇐). 设 $A \sim_s \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 其中 λ_i 均为 N 次单位根. 即 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow A^N = P\begin{pmatrix}\lambda_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^N\end{pmatrix}P^{-1} = PE_nP^{-1} = E_n$

4. $\mathcal{A}$ 幂零 $\iff \chi_{\mathcal{A}}$ 仅有零根

Pf. $\mathcal{A}$ 幂零 $\iff \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathcal{A}^N = \mathcal{O} \iff f(t) = t^N$ 是 $\mathcal{A}$ 的零化多项式

$\iff \mu_{\mathcal{A}} \mid t^N \iff \chi_{\mathcal{A}}$ 仅有零根.

5. V 是 $\mathcal{A}$ 循环空间 $\iff \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

Pf. V是 $\mathcal{A}$ 循环空间 $\iff \exists\, \vec{v} \in V$ s.t. $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}) \cdots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})\rangle$

$\iff \deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$ 由 $\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$ 且 $\deg(\chi_{\mathcal{A}}) = n$ 可知 $\iff \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$. □

6. $A=J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 μ_A、χ_A 和 A^k. 证明 $n>1$ A不可对角化.

解: $\chi_A=|tE-A|=(t-\lambda)^n \Rightarrow \mu_A \mid \chi_A$

$(A-\lambda E)^m=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}^m$ 若 $m<n$ 则 $(A-\lambda E)^m=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}&&m+1&&\\&&\downarrow&&\end{array}\\\begin{pmatrix}0&\cdots&1&&\\&\ddots&&\ddots&\\&&\ddots&&1\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&0\end{pmatrix}\end{array}\neq 0$

$\therefore \mu_A=(t-\lambda)^n$

$$A^k=(\lambda E+J_n(0))^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\cdot(J_n(0))^i=\begin{pmatrix}\lambda^k&\binom{k}{1}\lambda^{k-1}&\cdots&\cdots\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\binom{k}{1}\lambda^{k-1}\\&&&\lambda^k\end{pmatrix}$$

若 $k\leq n$ 则 $A^k=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}&&&k+1&&\\&&&\downarrow&&\end{array}\\\begin{pmatrix}\lambda^k&\binom{k}{1}\lambda^{k-1}&\cdots&1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&&1\\&&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&\ddots&\binom{k}{1}\lambda^{k-1}\\&&&&&\lambda^k\end{pmatrix}\end{array}$ 若 $k>n$ 则 $A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&\cdots&\cdots&\cancel{\binom{n}{k}\lambda^{k-n}}\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1}\\&\ddots&&\vdots\\&&\ddots&\vdots\\&&&\lambda^k\end{pmatrix}$

假设 A 可对角化 则 $A\sim_S\begin{pmatrix}\lambda&&\\&\ddots&\\&&\lambda\end{pmatrix}=\Lambda$ 而 $\mu_\Lambda=t-\lambda$

① 若 $n>1$ 则 $\mu_A\neq\mu_\Lambda \Rightarrow A\not\sim_S\Lambda$ ⇒← ∴ A不可对角化. □.

② μ_A 有重根.
⇓
不可对角化

③ $\mathrm{rank}(A-\lambda E)=n-1 \Rightarrow \dim V^\lambda=1$ (几何重数).
λ 代数重数 $=n$ $1\neq n \Rightarrow$ 不可对角化

第十五次作业

1.(柯 P81.1) $A=\begin{pmatrix} m & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & m & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & m \end{pmatrix}$ 求 $\det(A)$ 并写成 $\det(A)=\chi_S(m+1)$ 形式

解. $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 则 $A=(m+1)E-S$ 则 $\det(A)=\chi_S(m+1)$

由例4可知 $\chi_S(t)=t^{n-1}(t-n)$ $\therefore \det(A)=(m+1)^{n-1}(m+1-n)$

[另法：直接计算] $|A| \overset{\text{各行加到第1行}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} m-(n-1) & m-(n-1) & \cdots & m-(n-1) \\ -1 & m & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & m \end{vmatrix}$

$$=(m-n+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & m & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & m \end{vmatrix} \underset{(i=2,\cdots,n)}{\overset{(1)+(i)}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & m+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m+1 \end{vmatrix}\cdot(m-n+1)$$

$$=(m+1)^{n-1}\cdot(m-n+1)=\chi_S(m+1) \quad \square$$

2. 写出所有 4×4 阶幂零矩阵（精确到相似），有如下4种情况：

$A_1=J_2(0)\dotplus J_1(0)\dotplus J_1(0)$，$A_2=J_2(0)\dotplus J_2(0)$，$A_3=J_3(0)\dotplus J_1(0)$，$A_4=J_4(0)$

(注：O 不是幂零矩阵)

问 $B_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $B_2=\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $B_3=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$ $B_4=\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ 分别相似于谁.

解：设 $A\in M_4(F)$ 为幂零矩阵，即 $\exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $A^m=O \Rightarrow \mu_A(t)\mid t^m$

即 A 只有0特征值(当且仅当) $\therefore J(A)=\begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(0) \end{pmatrix}$

其中 $1<s\leq 4$ 且 $d_1+d_2+\cdots+d_s=4$ 且 $d_i\in\mathbb{Z}^+$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

若 $S=1$ 则 $J(A)=J_4(0)=A_4 \Rightarrow A\sim_s A_4$

$\mathscr{e}J(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}3 & & \\ & \ddots\ 3 & \\ & & -2\end{pmatrix}$

若 $S=2$ 则求 $d_1+d_2=4$ 的正整数解，在不计顺序的情况下有 2种情况：

Case1 $d_1=1,\ d_2=3$ 此时 $J(A)=J_3(0)\dotplus J_1(0) \Rightarrow A\sim_s A_3$

Case2 $d_1=2,\ d_2=2$ 此时 $J(A)=J_2(0)\dotplus J_2(0) \Rightarrow A\sim_s A_2$

若 $S=3$ 则 $d_1+d_2+d_3=4$ 只有一组正整数解（不计顺序）即 $d_1=1.\ d_2=1.\ d_3=2$.(3) $-2)$.

此时 $J(A)=J_1(0)\dotplus J_1(0)\dotplus J_2(0) \Rightarrow A\sim_s A_1$ lan 标准型

若 $S=4$ 则 $d_1+d_2+d_3+d_4=4$ 只有一组正整数解 即 $d_i=1\ (i=1,\cdots 4)$ 此时 $J(A)=O$ 矛盾.

综上，对任意 4x4 阶幂零矩阵，一定相似于某个 $A_i\ (i=1,\cdots 4)$

2) $(t-4)^2$

$\mathrm{rank}(A_1)=1$, $\mathrm{rank}(A_2)=2$, $\mathrm{rank}(A_3)=2$ $\mathrm{rank}(A_4)=3$

$\mu_{A_1}=t^2$ $\mu_{A_2}=t^2$ $\mu_{A_3}=t^3$ $\mu_{A_4}=t^4$

a_0

利用相似不变量 rank 和 μ 判断 B_i 相似于谁：

$\mathrm{rank}B_1=1 \Rightarrow B_1\sim_s A_1$.

$\mathrm{rank}B_2=2$ $\mu_{B_2}=t^2 \Rightarrow B_2\sim_s A_2$

$\mathrm{rank}B_3=3 \Rightarrow B_3\sim_s A_4$

$\mathrm{rank}B_4=2$ $\mu_{B_4}=t^3 \Rightarrow B_4\sim_s A_3$

3\. (1) $\chi_{\mathscr{A}}(t)=(t-3)^4(t+2)$ $\mathrm{rank}(\mathscr{A}-3\mathscr{E})=2$ 求 $J(\mathscr{A})$

(2) 若 $\mathrm{rank}(\mathscr{A}-3\mathscr{E})=1,3,4$，能唯一复原 $J(\mathscr{A})$ 吗？

解 (1) ∵ $\mathrm{rank}(\mathscr{A}-3\mathscr{E})=2$ ∴ $\dim V^3=\dim(\ker(\mathscr{A}-3\mathscr{E}))=5-2=3$ （几何重数）

$A)=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

（∵ $\deg_t(\chi_A)=5$ 为空间维数 $\dim V$ ）

而 3 的代数重数为 4

∴ $J(\mathscr{A})$ 中以 3 为特征值的 Jordan 块有 3 块 ∴ 只能是 $J_1(3)\dotplus J_1(3)\dotplus J_2(3)$

$\begin{pmatrix}4 & 1 & \\ & 4 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow J(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}\boxed{3} & & & & \\ & \boxed{3} & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & & \boxed{-2}\end{pmatrix}$$

5. (帰 P83.10) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 且特征值只有 1. 证明 对 $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. $A \sim_s A^k$.

Pf. 首先证明 $A = J_n(1)$ 且 $k>0$ 情形.

$A^k = (E_n + J_n(0))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (J_n(0))^i$ 是对角线为 1 的上三角矩阵

$\therefore \chi_{A^k} = (t-1)^n \quad \because \mu_{A^k} \mid \chi_{A^k} \quad \therefore \mu_{A^k} = (t-1)^m \quad (m \leq n)$

假设 $m<n$ 则 $\mu_{A^k} \mid (t-1)^{n-1}$ 即 $(t-1)^{n-1}$ 零化 A^k

$(A^k - E)^{n-1} = \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot (J_n(0))^i\right]^{n-1} \quad \because (J_n(0))^n = O$

$\therefore (A^k - E)^{n-1} = \left[\binom{k}{1} \cdot J_n(0)\right]^{n-1} = k^{n-1} \cdot (J_n(0))^{n-1} \neq O \quad \rightarrow\leftarrow$

另法: $\operatorname{rank}(A^k - E)$
$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & k & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k \\ & & & 0 \end{pmatrix} = n-1$
$\Rightarrow \dim V^1_{A^k} = n-(n-1) = 1$
$\Rightarrow$ 一块 Jordan 块

$\therefore m=n$ 即 $\mu_{A^k} = (t-1)^n = \chi_{A^k}$ 另一方面 $t-1 \in \mathbb{C}[t]$ 不可约

$\therefore \mathbb{C}^n$ 是 $\mathcal{A}^k$ 不可分空间 ($\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \ [\vec{v} \mapsto A^k \vec{v}]$)

$\Rightarrow \exists$ 一组基底 s.t. $\mathcal{A}$ 的矩阵为一块 Jordan 块. 即 $A^k \sim J_n(1) = A$

下面证明 $A = J_n(1)$ 且 ~~$k<0$~~ $k=-1$ ~~$k=-1$~~ 情形.

易证 $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (J_n(0))^k$ ~~$E_n - J_n(0)$~~ $\therefore \chi_{A^{-1}} = \mu_{A^{-1}} = (t-1)^n$ 类似地 $A^{-1} \sim_s A$.

最后证明一般情形.

$\because A$ 特征值只有 1 $\therefore A \sim_s J(A) = \begin{pmatrix} J_{d_1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(1) \end{pmatrix} \quad (1 \leq s \leq n,\ d_i \in \mathbb{Z}^+)$

$\therefore A^k \sim_s (J(A))^k = \begin{pmatrix} J^k_{d_1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J^k_{d_s}(1) \end{pmatrix}$

由上述证明可知 $J^k_{d_i}(1) \sim_s J_{d_i}(1)$ 即 $\exists P_i \in GL_{d_i}(\mathbb{C})$ s.t.

$J^k_{d_i}(1) = P_i^{-1} J_{d_i}(1) P_i$ 令 $P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s \end{pmatrix}$ 则 $P \in GL_n(\mathbb{C})$

且 $(J(A))^k = P^{-1} \begin{pmatrix} J_{d_1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(1) \end{pmatrix} \cdot P \Rightarrow (J(A))^k \sim_s J(A)$

于是 $A^k \sim_s (J(A))^k \sim_s J(A) \sim_s A$ 即 $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $A^k \sim_s A$. □

6. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 证明 $tr(A^k)=0$ 对 $k=1,2\cdots n$ 成立 $\Leftrightarrow$ A 幂零.

Pf. ($\Leftarrow$) A 幂零 $\Rightarrow$ A^k 幂零 $\Rightarrow$ A^k 特征值只有 0 $\Rightarrow$ $tr(J(A^k))=0 \overset{tr是相似不变量}{\Longrightarrow} tr(A^k)=0$

($\Rightarrow$) 设 $0=\lambda_0, \lambda_1 \cdots \lambda_s$ 为 A 两两不同的特征值.

$\because tr((J_d(\lambda))^k) = d\cdot\lambda^k$ 且 tr 是相似不变量

$\therefore tr(A^k) = \sum_{i=1}^{s} d_i \cdot \lambda_i^k$ 其中 $d_i \in \mathbb{Z}^+$, 实际上是 λ_i 的代数重数.

$\because tr(A^k)=0$ 对 $k=1,2\cdots n$ 成立 $\therefore \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} d_i\lambda_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{s} d_i\lambda_i^n = 0 \end{cases}$ 有正整数解. (将 $d_1 \cdots d_s$ 视为未定元)

而 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^s & \cdots & \lambda_s^s \end{vmatrix} = \lambda_1\cdots\lambda_s \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{s}\lambda_i \cdot \prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) \neq 0$

$\therefore rank\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \cdots & \lambda_s^n \end{pmatrix} = s \Rightarrow d_1\cdots d_s$ 只有零解 $\rightarrow \leftarrow$.

$\therefore$ A 没有非零特征值, 即 A 特征值只有 0 $\Rightarrow$ A 幂零 ($\because J_d(0)$ 幂零). □

循环子空间与不可分子空间

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 则

V 是 $\mathcal{A}$-循环空间 ($\exists \vec{v} \in V$ s.t. $V = \underset{\overset{\parallel}{F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}}}{\langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}) \cdots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}) \rangle}$) $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

注. 若 $\chi_A = \mu_A = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ 则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}) \cdots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵为

$\begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ Thm $\exists \vec{v}_1 \cdots \vec{v}_k \in V$ s.t. $V = \bigoplus_{i=1}^{k} F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_i$

~~最大一个~~ (最大一个子空间维数实际上是 ~~$\deg\mu_A$~~ $\deg\mu_{\mathcal{A}}$, 其它子空间是维数为 $\deg f$, $f | \mu_{\mathcal{A}}$)

V 是 $\mathcal{A}$-不可分空间 (不能分解2个子空间直和) $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}} = p^m$ ($p \in F[t]$ 不可约).

注: 若 $F=\mathbb{C}$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的 则 $\exists$ 一组基 s.t. $\mathcal{A}$ 的矩阵为一个 Jordan 块

此时 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$ 且矩阵为 $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ □

Thm. V 可分解成若干不可分子空间直和.

Jordan 标准型

Thm1 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则 ∃! 由若干 Jordan 块组成的矩阵 $\overset{\text{Jordan 标准型}}{\overset{\uparrow}{J(A)}}$ s.t. $A\sim_s J(A)$

计算方法:

1) 求特征多项式的不可约因式分解 (一般直接给出)

$$\chi_A=(t-\lambda_1)^{l_1}\cdots(t-\lambda_s)^{l_s}$$

其中 $\lambda_1\cdots\lambda_s\in\mathbb{C}$ 为特征值 (两两不同)

$l_1\cdots l_s$ 分别为 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 的代数重数. 即 $J(A)$ 中 λ_i 出现次数

且 $l_1+\cdots+l_s=n$

2) 求每个 λ_i 对应几个 Jordan 块及每个 Jordan 大小.

2.1) 计算 λ_i 对应的特征子空间维数 (几何重数)

$$N(\lambda_i)=\dim V^{\lambda_i}=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)$$ 即 $J(A)$ 中 λ_i 对应 Jordan 块的个数

2.2) 若 $N(\lambda_i)=1$ 则 $J(A)$ 中只有一个与 λ_i 相关的 Jordan 块 $J_{l_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$

若 $N(\lambda_i)=l_i$ 则 $J(A)$ 中与 λ_i 相关的 Jordan 块可对角化 即 $\Lambda(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}$

2.3) 若 $1<N(\lambda_i)<l_i$ 则计算如下各阶 Jordan 块的个数

$$N(\lambda_i,j)=\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^{j+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^{j-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^j$$

其中 $j=1,2\cdots$, $N(\lambda_i,j)$ 表示 $J_j(\lambda_i)$ 在 $J(A)$ 中的块数

直到 $N(\lambda_i)=N(\lambda_i,1)+\cdots+N(\lambda_i,k)$

(此时 $l_i=\sum_{j=1}^{k}j\cdot N(\lambda_i,j)$)

3) 将上述 Jordan 块排成分块对角阵形式.

注. 设 $\mu_A=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$ 则 $m_i\le l_i$ $(i=1,\cdots s)$

其中 m_i 表示 $J(A)$ 中与 λ_i 相关的最大 Jordan 块阶数

Thm2 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$. $A\sim_s B \iff \chi_A=\chi_B$ 且 $\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^k=\operatorname{rank}(B-\lambda_iE)^k$ 对 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ 成立

其中 λ_i 为 $A(B)$ 的任意特征值.

复空间线性算子分解

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间，$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\exists!\ \mathcal{S}, \mathcal{N} \in \mathcal{L}(V)$ s.t. $\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N} \\ \mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S} \end{cases}$

且 $\mathcal{S}$ 可对角化（半单），$\mathcal{N}$ 幂零。特别地，$\mathcal{S}, \mathcal{N}$ 均可表示为 $\mathcal{A}$ 的多项式。

Pf [存在性] 设 $\mathcal{A}$ 的极小多项式为 $m_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$，$\lambda_i$ 两两不同。

则由广义特征子空间直和分解：$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$，其中 $V(\lambda_i) := \ker\left((\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}\right)$（根子空间）

定义 $\mathcal{S}: V \longrightarrow V$ 满足 $\mathcal{S}|_{V(\lambda_i)} := \lambda_i \mathcal{E}|_{V(\lambda_i)}$

$\mathcal{N}: V \longrightarrow V$ 满足 $\mathcal{N}|_{V(\lambda_i)} := (\mathcal{A} - \mathcal{S})|_{V(\lambda_i)} = \mathcal{A}|_{V(\lambda_i)} - \mathcal{S}|_{V(\lambda_i)}$

显然 $\forall \vec{v} \in V$ 由直和分解 $\exists\ \vec{v_i} \in V(\lambda_i)$ s.t. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \vec{v_i}$

且 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{k} \vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}|_{V(\lambda_i)}(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{k} (\mathcal{N} + \mathcal{S})|_{V(\lambda_i)}(\vec{v_i})$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathcal{N}|_{V(\lambda_i)}(\vec{v_i}) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}|_{V(\lambda_i)}(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{N}(\vec{v_i}) + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(\vec{v_i})$$

$$= \mathcal{N}(\vec{v}) + \mathcal{S}(\vec{v}) = (\mathcal{N} + \mathcal{S})(\vec{v})$$ 于是 $\mathcal{A} = \mathcal{N} + \mathcal{S}$.

令 $V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)} = \ker(\mathcal{S} - \lambda_i \mathcal{E})$ 为 $\mathcal{S}$ 关于特征值 λ_i 的特征子空间（$\because \vec{v_i} \in V(\lambda_i)$

$\mathcal{S}(\vec{v_i}) = \lambda_i \mathcal{E}(\vec{v_i}) = \lambda_i \vec{v_i} \Rightarrow \lambda_i$ 为 $\mathcal{S}$ 特征值，$\vec{v_i}$ 为特征向量？

$\forall \vec{v} \in V(\lambda_i)$ $\mathcal{S}(\vec{v}) = \mathcal{S}|_{V(\lambda_i)}(\vec{v}) = \lambda_i \mathcal{E}(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \in V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)}$ $\therefore V(\lambda_i) \subseteq V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)}$.

$\forall \vec{v} \in V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)}$ $\mathcal{S}(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v}$ 由直和分解，$\mathcal{S}(\vec{v}) = \mathcal{S}(\vec{v_1}) + \cdots + \mathcal{S}(\vec{v_k})$ 其中 $\vec{v_j} \in V(\lambda_j)$.

$\therefore \mathcal{S}(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{v_j} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \vec{v_j} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_i)\vec{v_j} = \vec{0}$ 由直和分解中 $\vec{0}$ 分解

的唯一性可知 $(\lambda_j - \lambda_i)\vec{v_j} = \vec{0}$ $(j = 1, 2 \cdots k)$ 由于 $\lambda_j \neq \lambda_i$ $(j \neq i)$ $\therefore \vec{v_j} = \vec{0}$

$\therefore \vec{v} = \vec{v_i} \in V(\lambda_i) \Rightarrow V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)} \subseteq V(\lambda_i)$ 于是 $V(\lambda_i) = V_{\mathcal{S}}^{(\lambda_i)}$ $\therefore \mathcal{S}$ 可对角化.

令 $m = \max(m_1, \cdots m_k)$ 则 $\mathcal{N}^m(\vec{v}) = \mathcal{N}^m(\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_k) = \mathcal{N}^m(\vec{v}_1) + \cdots + \mathcal{N}^m(\vec{v}_k)$

其中 $\vec{v}_i \in V(\lambda_i) = \ker((\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i})$ 而 $\mathcal{N}^m(\vec{v}_i) = (\mathcal{N}|_{V(\lambda_i)})^m(\vec{v}_i)$

$= ((\mathcal{A} - \mathcal{S})|_{V(\lambda_i)})^m(\vec{v}_i) = ((\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})|_{V(\lambda_i)})^m(\vec{v}_i) = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^m(\vec{v}_i)$

由于 $m \geq m_i$ $\therefore \mathcal{N}^m(\vec{v}_i) = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m-m_i}((\mathcal{A} - \lambda_i)^{m_i}(\vec{v}_i)) = \vec{0}$ 对 $\forall i = 1, 2 \cdots k$ 成立.

$\therefore \mathcal{N}^m(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{N}^m(\vec{v}_i) = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{N}^m = \mathcal{O}$ 即 $\mathcal{N}$ 幂零.

下证 $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$: 对 $\forall \vec{v} \in V$ 由直和分解 $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \vec{v}_i$ 其中 $\vec{v}_i \in V(\lambda_i)$.

则 $\mathcal{S}\mathcal{N}(\vec{v}) = \mathcal{S}\mathcal{N}(\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_k) = \mathcal{S}\mathcal{N}(\vec{v}_1) + \cdots + \mathcal{S}\mathcal{N}(\vec{v}_k)$

$= \sum_{i=1}^{k} (\mathcal{S}\mathcal{N})|_{V(\lambda_i)}(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(\mathcal{N}|_{V(\lambda_i)}(\vec{v}_i)) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}((\mathcal{A} - \mathcal{S})|_{V(\lambda_i)}(\vec{v}_i))$

$= \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(\mathcal{A}(\vec{v}_i) - \lambda_i \vec{v}_i)$ $\because V(\lambda_i)$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间 $\therefore \mathcal{A}(\vec{v}_i) - \lambda_i \vec{v}_i \in V(\lambda_i)$

$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{A}(\vec{v}_i) - \lambda_i^2 \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \cancel{\lambda_i}(\mathcal{A}(\lambda_i \vec{v}_i) - \lambda_i(\lambda_i \vec{v}_i))$

$= \sum_{i=1}^{k} (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})(\lambda_i \mathcal{E})(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{N} \circ \mathcal{S}(\vec{v}_i) = \mathcal{N} \circ \mathcal{S}(\sum_{i=1}^{k} \vec{v}_i) = \mathcal{N}\mathcal{S}(\vec{v})$

[唯一性] 设 $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$ 满足 $\mathcal{S}$ 可对角化. $\mathcal{N}$ 幂零. $\mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S}$.

下证 $\mathcal{S}$ 可表示为 $\mathcal{A}$ 的多项式.

中国剩余定理 (一元多项式版).

设 $p_1 \cdots p_s \in F[t]$ 两两互素 $r_1 \cdots r_s \in F[t]$

$$\begin{cases} r \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ \vdots \\ r \equiv r_s \pmod{p_s} \end{cases}$$

有解. 另外, 若要求 $\deg(r) < \deg(\prod_{i=1}^{s} p_i)$

则解唯一.

Pf. [归纳法]. $s=1$ 利用带余除法 $r_1 = q_1 \cdot p_1 + r$ 有 $r \equiv r_1 \pmod{p_1}$ 且 $\deg(r) < \deg(p_1)$

假设 $s-1$ 成立. 即 $\exists\ \tilde{r} \in F[t]$ s.t. $\tilde{r} \equiv r_i \pmod{p_i}$ $i=1,2\cdots s-1$

则 $\tilde{r} + q p_1 \cdot p_2 \cdots p_{s-1}$ 为方程组 $\begin{cases} r \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ \vdots \\ r \equiv r_{s-1} \pmod{p_{s-1}} \end{cases}$ 的解 $(\forall\ q \in F[t])$

若它也是 $r \equiv r_s \pmod{p_s}$ 的解 则 $\exists\ \tilde{q} \in F[t]$ s.t. $\tilde{r} + q p_1 \cdots p_{s-1} = \tilde{q} p_s + r_s$

$\Rightarrow \tilde{r} - r_s = \tilde{q} \cdot p_s + (-q) \cdot p_1 \cdots p_{s-1}$ $\because p_1 \cdots p_s$ 两两互素.

$\therefore \gcd(p_1 \cdots p_{s-1}, p_s) = 1$ 由 Bézout 关系 $\exists\ a, b \in F[t]$ s.t.

$a p_1 \cdots p_{s-1} + b p_s = 1$ 令 $\begin{cases} \tilde{q} = (\tilde{r} - r_s) \cdot b \\ q = (r_s - \tilde{r}) \cdot a \end{cases}$

则 $r = \tilde{r} + q p_1 \cdots p_{s-1} = \tilde{r} + (r_s - \tilde{r}) a p_1 \cdots p_{s-1}$ 为方程组 $\begin{cases} r \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ \vdots \\ r \equiv r_s \pmod{p_s} \end{cases}$ 解.

$\therefore$ 有解. 另外. 由带余除法 可找到唯一的次数小于 $(p_1 \cdots p_{s-1})$ 的解 □.

考虑如下同余方程组: $\begin{cases} f \equiv \lambda_1 \pmod{(t-\lambda_1)^{m_1}} \\ \vdots \\ f \equiv \lambda_k \pmod{(t-\lambda_k)^{m_k}} \end{cases}$ (*)

由中国剩余定理 (*) 有解 记为 $f(t)$ 则由同余式可知 ~~$(A-\lambda_i \mathcal{E})^{m_i} \mid f(A) - \lambda_i \mathcal{E}$~~

$(t-\lambda_i)^{m_i} \mid f(t) - \lambda_i$ 对 $\forall\ \vec{v} \in V(\lambda_i)$ $(f(A) - \lambda_i \mathcal{E})(\vec{v}) = \vec{0}$ $\Rightarrow f(A) - \lambda_i \mathcal{E}|_{V(\lambda_i)} = 0$

$\therefore f(A)|_{V(\lambda_i)} = \lambda_i \mathcal{E}|_{V(\lambda_i)} = \mathcal{S}|_{V(\lambda_i)}$ $\Rightarrow \mathcal{S} = f(A) \in F[A]$

$\mathcal{N} = A - \mathcal{S} = A - f(A) \in F[A]$

$\therefore \mathcal{S}, \mathcal{N}$ 均可表示为 A 的多项式. □

假设 $\mathcal{A}=S'+N'$ 也满足 S' 可对角化，N' 幂零 且 $S'N'=N'S'$

则 $S+N=S'+N' \Rightarrow S-S'=N'-N$

∵ S 和 S' 都是 $\mathcal{A}$ 的多项式 ∴ $S\cdot S'=S'\cdot S$

∵ S 可对角化 ∴ $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_S^{\lambda_i}$ （S 特征子空间直和）

∵ S 与 S' 可交换 ∴ $V_S^{\lambda_i}$ 是 S'-不变子空间. 又∵ S' 可对角化.

∴ $\mu_{S'}$ 无重根 $\Rightarrow$ $\mu_{S'|_{V_S^{\lambda_i}}}$ 无重根 $\Rightarrow$ S' 在 $V_S^{\lambda_i}$ 上的限制可对角化.

即 ∃ $\vec{v}_{i1}\cdots\vec{v}_{id_i}$ 构成 $V_S^{\lambda_i}$ 的一组基 s.t. S' 在此基下矩阵为对角阵.

于是在 $\{\vec{v}_{11}\cdots\vec{v}_{1d_1}\cdots\vec{v}_{k1}\cdots\vec{v}_{kd_k}\}$ 下 S 矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_1&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&\lambda_k&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&\lambda_k\end{pmatrix}$

且 S' 的矩阵也为对角阵 $\Rightarrow$ $S-S'$ 的矩阵为对角阵.

另外 ∵ N' 和 N 都幂零 ∴ $N'-N$ 幂零（设 $(N')^{\alpha'}=O$，$N^{\alpha}=O$

则 $(N'-N)^{\alpha'+\alpha}=\sum\limits_{i=0}^{\alpha'+\alpha}\binom{\alpha'+\alpha}{i}\cdot(N')^{i}\cdot(-N)^{\alpha'+\alpha-i}$ $\Rightarrow$ 要么 $i\geqslant\alpha'$ 要么 $\alpha'+\alpha-i\geqslant\alpha$）

因此 可对角化的 $(S-S')$ = 幂零的 $N'-N$ 则 ∃ 可逆 $P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$\left[P^{-1}(S-S')P\right]^{\tilde{\alpha}}=\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix}^{\tilde{\alpha}}=O \Rightarrow \beta_1=\cdots=\beta_n=0 \Rightarrow S-S'=O$$

∴ $S=S'$ $N=N'$ 可得唯一性.

综上，对 ∀ 复空间上的算子 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可找到唯一一对算子 $S,N\in\mathcal{L}(V)$ 满足

$\mathcal{A}=S+N$，S 可对角化，N 幂零 且 $SN=NS$.

特别地，S,N 均为 $\mathcal{A}$ 的多项式.