第十六次作业

1. 计算 Jordan 标准型. (1). $A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$. (2). $B=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&2&-1&1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$.

$\chi_A=(t-3)(t+1)^2$. $\chi_B=(t-1)^4$

解: (1). $\chi_A=(t-3)(t+1)^2$. 则 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$.

$\mathrm{rank}(A+E)=2 \Rightarrow N(3)=3-2=1$.

$\therefore J(A)=\begin{pmatrix}J_2(-1)&\\&J_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1&1\\&-1\end{matrix}}&\\&\boxed{3}\end{pmatrix}$.

(2). $\chi_B=(t-1)^4$. $\lambda=1$

$\mathrm{rank}(B-E)=2$, $\mathrm{rank}(B-E)^2=0$. 则 $\mathrm{rank}(B-E)^k=0$, $k\geq 2$.

$\therefore N(1)=4-2=2$. 又 $N(1,1)=\overset{0}{\mathrm{rank}(B-E)^2}+\overset{4}{\mathrm{rank}(B-E)^0}-\overset{2\cdot 2}{2\mathrm{rank}(B-E)}=0$

$\therefore N(1,2)=2$, $J(B)=\begin{pmatrix}J_2(1)&\\&J_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&1\\&1\end{matrix}}&\\&\boxed{\begin{matrix}1&1\\&1\end{matrix}}\end{pmatrix}$.

2. 解方程 (1). $X^2=\begin{pmatrix}3&1\\-1&5\end{pmatrix}=A$ (2). $X^2=\begin{pmatrix}6&2\\3&7\end{pmatrix}=B$.

解: $\chi_A=(t-4)^2$ $\because \mathrm{rank}(4E-A)=1$ $\therefore \dim V^4=2-1$. $\therefore J(A)=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$

设 $J_A=S^{-1}AS$, $S=\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}$ 由 $SJ_A=AS \Rightarrow \begin{cases}s_{11}-s_{21}=0\\s_{11}-s_{21}=0\\-s_{11}+s_{12}-s_{22}=0\\s_{12}+s_{21}-s_{22}=0\end{cases}$

取一组解 $s_{11}=s_{21}=1$, $s_{12}=2$, $s_{22}=3$, s.t. S 可逆.

$S=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$. 且 $S^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$.

先解方程 $Y^2=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$. 设 $Y=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a^2+bc=4\\ab+bd=1\\ac+cd=0\\bc+d^2=4\end{cases}$

$a^2=d^2=4$
$c=0$, $ab+bd=1$

$\Rightarrow \begin{cases}(a+d)b=1\\(a+d)c=0\end{cases} \Rightarrow c=0 \Rightarrow \begin{cases}a^2=d^2=4\\(a+d)b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=d=2\\c=0\\b=\frac{1}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=d=-2\\c=0\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$

$Y^2 = J_A = S^{-1}AS \Rightarrow SY^2S^{-1} = (SYS^{-1})^2 = A$

$\Rightarrow X_1 = SY_1S^{-1} = S\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{4}\\ 0 & 2\end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{7}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4}\end{pmatrix}$, $X_2 = SY_2S^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4}\end{pmatrix}$

(2). $\chi_B = (t-9)(t-4)$. $\lambda_1 = 9$ 的特征向量 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 4$ 的特征向量 $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

令 $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 则 $B = S\begin{pmatrix}9 & \\ & 4\end{pmatrix}S^{-1}$

设 $Y = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, s.t. $Y^2 = \begin{pmatrix}9 & \\ & 4\end{pmatrix}$. $\Rightarrow \begin{cases}a^2 = 9\\ b^2 = c^2 = 0\\ d^2 = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \pm 3\\ d = \pm 2\\ b = c = 0\end{cases}$

$\Rightarrow (SYS^{-1})^2 = B \Rightarrow X = SYS^{-1} \overset{a=3,\ d=2}{=\!=} \begin{pmatrix}\frac{12}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{13}{5}\end{pmatrix}$.

$a=-3, d=-2, X = \begin{pmatrix}-\frac{12}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5}\end{pmatrix}$. $a=3, d=-2, X = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. $a=-3, d=2, X = \begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

3. 计算 $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ 的 Jordan 标准型.

用极小多项式
计算特征值.
写 Jordan 型.

解: $\because A^2 = AA = \begin{pmatrix}\vec{e}_n^{\,t}\\ \vdots\\ \vec{e}_1^{\,t}\end{pmatrix}(\vec{e}_n, \cdots, \vec{e}_1) = E$. $\therefore t^2-1$ 零化 A.

又 $\because A-E \neq 0$, $A+E \neq 0$. $\therefore \mu_A(t) = t^2-1 = (t-1)(t+1)$ 无重因子

$\therefore A$ 可对角化. n 为偶数, $E-A = \begin{pmatrix}1 & & & & & -1\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -1 & & & & & 1\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(E-A) = \frac{n}{2}$

n 为奇数, $E-A = \begin{pmatrix}1 & & & & -1\\ & 1 & & -1 & \\ & & 0 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 1 & & & & 1\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(E-A) = \frac{n-1}{2}$

$-E-A$ 的情况同样方法讨论.

$$\Rightarrow N(1) = n - \mathrm{rank}(E-A) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n\text{奇} \\ \frac{n}{2}, & n\text{偶} \end{cases}$$

$$N(-1) = n - \mathrm{rank}(-E-A) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n\text{奇} \\ \frac{n}{2}, & n\text{偶} \end{cases} \qquad -E-A = -\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore J(A) = \begin{pmatrix} E_{\frac{n+1}{2}} & \\ & -E_{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$，$n$奇． $J(A) = \begin{pmatrix} E_{\frac{n}{2}} & \\ & -E_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$，$n$偶．

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. 问$A$可能有什么Jordan标准型？求$A$可对角化的充要条件．

解：$\chi_A = (t-2)^2(t+1)$， $\mathrm{rank}(2E-A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 3 \end{pmatrix}$.

A可对角化 $\Leftrightarrow 2 = \underset{N(2)}{\underset{\shortparallel}{\dim}} V^2 \Leftrightarrow a = 0$，此时，$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

$= 3 - \mathrm{rank}(2E-A) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(2E-A) = 1$

A不可对角化，则 $\dim V^2 = 1$，即 $a \neq 0$，此时，$J(A) = \begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix}$.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 证明：$\forall f \in \mathbb{C}[t]$. $f(A)$特征值为$f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.

Pf: 设 $A = P^{-1}J(A)P$，其中 $P \in GL_n(\mathbb{C})$，$J(A)$为A的Jordan标准形．

$\because A^k = P^{-1}J(A)^k P \quad \therefore \forall f \in \mathbb{C}[t]$， $f(A) = P^{-1}f(J(A))P$

$\therefore f(A) \sim_s f(J(A))$． 又 $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & 0 \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $*$为1或0.

$\therefore f(A) \sim_s f(J(A)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$ 特征值为 $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$. $\blacksquare$

6. 设V是域F上的n维线性空间．$\mathcal{A} \in L(V)$. 若V的某个循环子空间可分解为两个$\mathcal{A}$-子空间的直和．则这两个$\mathcal{A}$-子空间也是循环子空间．

Pf: 设W是V的$\mathcal{A}$-循环子空间．且$W = W_1 \oplus W_2$，其中W_1, W_2均为$\mathcal{A}$-子空间

设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 为W_1的一组基，$\vec{v}_{s+1}, \cdots, \vec{v}_m$ 为W_2的一组基． 证循环子空间

则 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s, \vec{v}_{s+1}, \cdots, \vec{v}_m$ 为W的一组基 用$\mu = \chi$.

$\because W_1, W_2$ 均为 $\mathcal{A}$-子空间

$\therefore \mathcal{A}|_W$ 在 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} \in M_m(F)$.

其中 $A_1 \in M_s(F)$ 为 $\mathcal{A}|_{W_1}$ 在 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 下的矩阵,

$A_2 \in M_{m-s}(F)$ 为 $\mathcal{A}|_{W_2}$ 在 $\vec{v}_{s+1}, \cdots, \vec{v}_m$ 下的矩阵.

$\therefore \chi_{\mathcal{A}|_W} = \chi_A = |tA - E| = \begin{vmatrix} tE_s - A_1 & \\ & tE_{m-s} - A_2 \end{vmatrix} = |tE_s - A_1| \cdot |tE_{m-s} - A_2| = \chi_{A_1} \chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}|_{W_1}} \chi_{\mathcal{A}|_{W_2}}$.

又 $\because W$ 是 $\mathcal{A}$-循环子空间 $\therefore \chi_{\mathcal{A}|_W} = \mu_{\mathcal{A}|_W} = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}|_{W_1}}, \mu_{\mathcal{A}|_{W_2}})$.

设 $\operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}|_{W_1}}, \mu_{\mathcal{A}|_{W_2}}) = \mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} \cdot P_1 = \mu_{\mathcal{A}|_{W_2}} \cdot P_2$, 其中 $P_1, P_2 \in F[t]$.

又 $\chi_{\mathcal{A}|_W} = \chi_{\mathcal{A}|_{W_1}} \cdot \chi_{\mathcal{A}|_{W_2}} = \mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} \cdot P_1$, $\deg \mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} \le \deg \chi_{\mathcal{A}|_{W_1}}$

$\Rightarrow \deg \chi_{\mathcal{A}|_{W_2}} \le \deg P_1$. 又 $\deg(\mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} \cdot P_1) \le \deg(\mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} \cdot \mu_{\mathcal{A}|_{W_2}})$

$\Rightarrow \deg(P_1) \le \deg(\mu_{\mathcal{A}|_{W_2}}) \Rightarrow \deg(\chi_{\mathcal{A}|_{W_2}}) \le \deg(\mu_{\mathcal{A}|_{W_2}})$

$\Rightarrow \deg(\chi_{\mathcal{A}|_{W_2}}) = \deg(\mu_{\mathcal{A}|_{W_2}})$, 又 $\mu_{\mathcal{A}|_{W_2}} \mid \chi_{\mathcal{A}|_{W_2}} \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}|_{W_2}} = \chi_{\mathcal{A}|_{W_2}}$.

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}|_{W_1}} = \chi_{\mathcal{A}|_{W_1}} \Rightarrow W_1, W_2$ 均为 $\mathcal{A}$-循环子空间.

方2. 设 $W = F[\mathcal{A}]\vec{v}$, 其中 $\vec{v} \in V$. 设 $W = W_1 \oplus W_2$, W_i 为 $\mathcal{A}$-子空间 $(i=1,2)$.

则 $\exists!\ \vec{v}_1 \in W_1, \vec{v}_2 \in W_2$, s.t. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

下证 $W_i = F[\mathcal{A}]\vec{v}_i$, $i=1,2$.

$\forall\ \vec{w}_1 \in W_1 \subseteq W$, 则 $\vec{w}_1 = \vec{w}_1 + \vec{0} \in W_1 \oplus W_2$. 分解唯一.

又 $\exists f \in F[t]$, s.t. $\vec{w}_1 = f(\mathcal{A})(\vec{v}) = f(\mathcal{A})(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\mathcal{A})(\vec{v}_1) + f(\mathcal{A})(\vec{v}_2)$

$\because W_1, W_2$ 均为 $\mathcal{A}$-子空间. $\therefore f(\mathcal{A})(\vec{v}_i) \in W_i$, $i=1,2$.

由直和分解唯一性, 知 $f(\mathcal{A})(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $f(\mathcal{A})(\vec{v}_2) = \vec{0}$

$\therefore \vec{w}_1 \in F[\mathcal{A}]\vec{v}_1$ $\therefore W_1$ 是 $\mathcal{A}$-循环的. 同理可证 W_2 是 $\mathcal{A}$-循环.

四.

欧氏空间

Def1. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间，$f(\vec{x},\vec{y})$ 是 V 上对称双线性型，且 $f(\vec{x},\vec{y})$ 是正定二次型，则称 (V,f) 是一个欧氏空间. f 称为 V 上的内积，记作 $f(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}\cdot\vec{y}$ 或 $(\vec{x}|\vec{y})$. 即 $f: V\times V\to\mathbb{R}$, $\vec{x},\vec{y}\mapsto f(\vec{x},\vec{y})$. 满足 $\begin{cases} f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x}) \\ f(\vec{x},\vec{x})\geq 0, \end{cases}$ "=" $\Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

Def2. 长度 $|\vec{x}| := \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ $\quad(\vec{x}\in V)$

距离 $|\vec{x}-\vec{y}|$. $\quad(\vec{x},\vec{y}\in V)$.

夹角 $\theta := \arccos\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$，其中 $\begin{cases} \theta=0, \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 同向} \\ \theta=\pi, \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 反向} \\ \theta=\frac{\pi}{2} \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 正交}. \end{cases}$ （前两者）线性相关.

Prop1. 设 V 为欧氏空间 $\vec{x},\vec{y}\in V$. 则

(i). Cauchy 不等式. $|\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{y}}_{\in\mathbb{R}}| \leq |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 线性相关.

(ii). 三角不等式. $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}|+|\vec{y}|$.

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 同向. (i.e. $\exists\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, s.t. $\vec{x}=\lambda\vec{y}$).

Def3（单位正交基）设 V 是 n 维欧氏空间，$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基满足

(i). $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 为单位向量，i.e. $|\vec{e}_i|=1=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i$

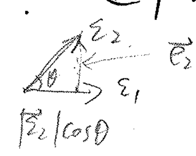
(ii). $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 两两正交，i.e. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0$.

$\Big\}$ $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$.

Gram-Schmit 正交化.

设 V 为 n 维欧氏空间. $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组基. 构造单位正交基.

1). $\vec{e}_1=\dfrac{\vec{\varepsilon}_1}{|\vec{\varepsilon}_1|}$ （单位化） 则 $\langle\vec{\varepsilon}_1\rangle=\langle\vec{e}_1\rangle$.



2). $\vec{e}_2'=\vec{\varepsilon}_2-\underbrace{(\vec{\varepsilon}_2\cdot\vec{e}_1)}_{=\cos\theta\cdot|\vec{\varepsilon}_2||\vec{e}_1|}\vec{e}_1$, $\quad \vec{e}_2=\dfrac{\vec{e}_2'}{|\vec{e}_2'|}$ （单位化）. 则 $\langle\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2\rangle=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle$.

...

3). 令 $\vec{e}_n'=\vec{\varepsilon}_n-(\vec{\varepsilon}_n\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\vec{\varepsilon}_n\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2-\cdots-(\vec{\varepsilon}_n\cdot\vec{e}_{n-1})\cdot\vec{e}_{n-1}$

令 $\vec{e}_n=\dfrac{\vec{e}_n'}{|\vec{e}_n'|}$ 则 $\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$ 为 V 的两两正交单位向量.

$=\langle\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n\rangle$.

注：$(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)\cdot C$，其中 C 为上三角矩阵

QR 分解：$\forall$ 非退化矩阵可分解为正交矩阵 $\times$ 上三角矩阵.

例. 设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m\in V$ 满足 $\forall i,j\in\{1,\cdots,m\}$, $i\neq j$ $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j<0$. 证: $m\le\dim V+1$.

Pf: 设 $\dim V=n$. $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s$ 是 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m$ 的极大线性无关组

$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_s$ 是通过对 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s$ 实行 Gram-Schmit 正交化得到的单位正交向量. 断言: $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$, $j\in\{s+1,\cdots,m\}$. $\vec{e}_i\cdot\vec{v}_j<0$.

首先证明断言, 对 s 用数学归纳法.

$s=1$. $\vec{e}_1=\frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1$, $1/|\vec{v}_1|>0$. $\Rightarrow$ $\vec{e}_1\cdot\vec{v}_j=1/|\vec{v}_1|\cdot(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_j)<0$.

设 $s-1$ 时断言成立, 当 s 时. $\vec{e}_s=\lambda_s(\vec{v}_s-(\vec{e}_1\cdot\vec{v}_s)\vec{e}_1-\cdots-(\vec{e}_{s-1}\cdot\vec{v}_s)\vec{e}_{s-1})$,

则 $\vec{e}_s\cdot\vec{v}_j=\lambda_s(\vec{v}_s\cdot\vec{v}_j-(\vec{e}_1\cdot\vec{v}_s)(\vec{e}_1\cdot\vec{v}_j)-\cdots-(\vec{e}_{s-1}\cdot\vec{v}_s)(\vec{e}_{s-1}\cdot\vec{v}_j))$. 其中 $\lambda_s>0$. $j\in\{s+1,\cdots,m\}$.

由归纳假设知 $\forall i\in\{1,\cdots,s-1\}$, $j\in\{s,s+1,\cdots,m\}$. $\vec{e}_i\cdot\vec{v}_j<0$

($\vec{e}_1\cdot\vec{v}_s<0$, $\cdots$, $\vec{e}_{s-1}\cdot\vec{v}_s<0$. $\vec{e}_1\cdot\vec{v}_j<0$, $\cdots$, $\vec{e}_{s-1}\cdot\vec{v}_j<0$)

于是 $(\vec{e}_i\cdot\vec{v}_s)(\vec{e}_i\cdot\vec{v}_j)>0$, 其中 $i\in\{1,\cdots,s-1\}$. $j\in\{s,s+1,\cdots,m\}$.

由题知 $\vec{v}_s\cdot\vec{v}_j<0$, 则 $\vec{e}_s\cdot\vec{v}_j<0$. 断言成立.

假设 $m>n+1\ge s+1$, 设 $\vec{v}_{n+1}=\alpha_1\vec{e}_1+\cdots+\alpha_s\vec{e}_s$, $\vec{v}_{n+2}=\beta_1\vec{e}_1+\cdots+\beta_s\vec{e}_s$.
($n+1, n+2\in\{s+1,\cdots,m\}$).

由断言 $\vec{v}_{n+1}\cdot\vec{e}_i<0$ $\Rightarrow$ $\alpha_i<0$, $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$.

同理, $\beta_i<0$, $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$

而 $0>\vec{v}_{n+1}\cdot\vec{v}_{n+2}=\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_s\beta_s>0$. ($\to\leftarrow$). ▨

实际上, $m\le\dim(\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m\rangle)+1$.