第十七次作业

1. 在次数不超过2的实多项式形成的向量空间 P_3，内积 $(f|g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$，向量 $1, t$ 是正交的. 找出

(1). 子空间 $\langle 1, t\rangle^{\perp}$.

(2). 向量 $1, t+1$ 的夹角；$t, t+1$ 的夹角.

(3). P_3 的一个标准正交基.

解：(1). 设 $f(t)=a_2t^2+a_1t+a_0 \in P_3 \in \langle 1, t\rangle^{\perp}$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (f(t)|1)=\int_{-1}^{1} a_2t^2+a_1t+a_0\, dt = \left(\frac{a_2}{3}t^3+\frac{a_1}{2}t^2+a_0t\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}a_2+2a_0=0 \\ (f(t)|t)=\int_{-1}^{1} a_2t^3+a_1t^2+a_0t\, dt = \left(\frac{a_2}{4}t^4+\frac{a_1}{3}t^3+\frac{a_0}{2}t^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}a_1=0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow f=a_0+(-3a_0)t^2=a_0(-3t^2+1)$. $\Longleftrightarrow \langle 1, t\rangle^{\perp}=\langle -3t^2+1\rangle_{\mathbb{R}}$.

(2). $(1|t+1)=\int_{-1}^{1}(t+1)dt=2$，$|t+1|=\sqrt{(t+1|t+1)}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

$(t|t+1)=\int_{-1}^{1} t(t+1)dt=\frac{2}{3}$，$|t|=\sqrt{(t|t)}=\sqrt{\frac{2}{3}}$，$|1|=\sqrt{(1|1)}=\sqrt{2}$.

$\therefore \frac{(1|t+1)}{|1|\cdot|t+1|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8/3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore 1, t+1$ 夹角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \frac{(t|t+1)}{|t|\cdot|t+1|}=\frac{2/3}{\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{8/3}}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $t, t+1$ 夹角为 $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

(3). 由于 $\dim P_3=\dim_{\mathbb{R}}(\langle 1, t, t^2\rangle)=3$.

由 (1) 知 $\langle 1, t\rangle^{\perp} \oplus \langle 3t^2-1\rangle = P_3$. $\therefore 1, t, 3t^2-1$ 为 P_3 的正交基.

单位化后，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{\frac{3}{2}}t$，$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)$ 为 P_3 的一组单位正交基.

2. 把向量 $X_1=\frac{1}{2}(1,-1,1,1)$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基.

解：先求 $\langle X_1\rangle^{\perp}$. 设 $(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\langle X_1\rangle^{\perp}$. 则 $x_1-x_2+x_3+x_4=0$.

$\xi_1=(1,1,0,0)$，$\xi_2=(1,0,-1,0)$，$\xi_3=(1,0,0,-1)$ 为其解空间即 $\langle X_1\rangle^{\perp}$ 的一组基.

令 $\varepsilon_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$.

$\vec{e_2}' = \vec{\varepsilon_2} - (\vec{\varepsilon_2} \cdot \vec{e_1})\vec{e_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0)$. $\quad \vec{e_2} = \frac{\vec{e_2}'}{|\vec{e_2}'|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0)$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2, 0)$.

$\vec{e_3}' = \vec{\varepsilon_3} - (\vec{\varepsilon_3} \cdot \vec{e_1})\vec{e_1} - (\vec{\varepsilon_3} \cdot \vec{e_2})\vec{e_2} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cancel{\ })$.

令 $\vec{e_3} = \frac{\vec{e_3}'}{|\vec{e_3}'|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, -3)$.

令 $\vec{e_4} = \frac{\vec{x_1}}{|\vec{x_1}|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$. 则 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基.

3. 用正交化方法证明：任意的非退化矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 都可分解成 $A = BC$ 的形式，其中 B 是正交矩阵，C 是上三角矩阵且 $\det A = \pm \det C$.

Pf: 设 $A = (\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)})$. 由 A 非退化知，$\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

设 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 为 $\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}$ 经过 Gram-Schmidt 正交化后得到的一组标准正交基. 则 $\langle \vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(k)} \rangle = \langle \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k} \rangle$, $k = 1, \cdots, n$.

设 $\vec{A}^{(1)} = \lambda_{11}\vec{e_1}$

$\vec{A}^{(2)} = \lambda_{21}\vec{e_1} + \lambda_{22}\vec{e_2}$

$\cdots$

$\vec{A}^{(n)} = \lambda_{n1}\vec{e_1} + \cdots + \lambda_{nn}\vec{e_n}$

$$\Rightarrow A = (\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}) = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}) \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{n1} \\ & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $B = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$, $C = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{n1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$, 则 $B^t B = (\vec{e_i}^t \vec{e_j}) = E$.

$\therefore \det(B)^2 = \det(E) = 1$

$\therefore \det(B) = \pm 1$.

且 $\det(A) = \det(BC) = \det(B)\det(C) = \pm \det(C)$. □

4. 证明：n 阶正交矩阵 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 具有性质：$t^n \chi_A(\frac{1}{t}) = \pm \chi_A(t)$.

Pf: $t^n \chi_A(\frac{1}{t}) = t^n \cdot |\frac{1}{t}E - A| = t^n \cdot (\frac{1}{t})^n |E - tA| = |AA^t - tA|$

$= |A(A^t - tE)| = |A| \cdot |A^t - tE| = (-1)^n |A| \cdot |tE - A^t|$.

又 $\because A^t A = E$, $\therefore |A| = \pm 1$ 且 $A \sim_s A^t$

$\therefore t^n \chi_A(\frac{1}{t}) = (-1)^n |A| \, |tE - A^t| = \pm 1 \cdot \chi_{A^t}(t) = \pm \chi_A(t)$. □

5. 设 W 是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的解空间. 求 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

解: 设 $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

则 $W^\perp = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4 \rangle$.

而 $\vec{\varepsilon}_3 = -\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_4 = \vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_1$ 且 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$ 线性无关

$\therefore W^\perp = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle$ 是一组基. 用 Gram-Smidt 正交化.

令 $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{\varepsilon}_1}{|\vec{\varepsilon}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)^t$.

$\vec{e}_2{}' = \vec{\varepsilon}_2 - (\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 = (2,1,0,1)^t - \frac{1}{2}(1,0,0,-1)^t = (\frac{3}{2}, 1, 0, \frac{3}{2})^t$.

令 $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{e}_2{}'}{|\vec{e}_2{}'|} = \dfrac{1}{\sqrt{22}}(3, 2, 0, 3)^t$.

则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

6. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 为一组基. 求证:

(i). $\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} \cdot \vec{e}_i = 0$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$.

(ii). $\vec{x} = \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{e}_i = \vec{y} \cdot \vec{e}_i$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$.

Pf: (i). "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, 其中 $x_1, \cdots, x_n \in F$.

则 $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot (x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1(\vec{x} \cdot \vec{e}_1) + \cdots + x_n(\vec{x} \cdot \vec{e}_n) = 0$.

$\iff \vec{x} = \vec{0}$ (由于内积 $\vec{x} \cdot \vec{x}$ 是正定二次型).

(ii). "$\Rightarrow$" 显然.

内积是对称双线性型.

"$\Leftarrow$" $\vec{x} \cdot \vec{e}_i = \vec{y} \cdot \vec{e}_i \Rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{e}_i = 0$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$.

由 (i) 知 $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$. ▯

正交矩阵.

Def. 设 $A\in GL_n(\mathbb{R})$, 如果 $A^tA=E$, 即 $A^{-1}=A^t$, 则称 A 是正交矩阵

基本性质: 设 A,B 为正交矩阵. 则 (正交算子).

i). $|A|=\pm1$.

ii). $A^t(=A^{-1})$, AB 也是正交矩阵.

iii). $O_n(\mathbb{R}):=\{A\in GL_n(\mathbb{R})\mid A^t=A^{-1}\}\subseteq GL_n(\mathbb{R})$ 是子群.

正交相似

Def. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, 若 $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $B=P^{-1}AP=P^tAP$

则称 B 正交相似于 A, 记作 $A\sim_o B$. (等价关系)

注: i). 两组单位正交基之间的过渡矩阵为正交矩阵.

$\mathcal{A}\in L(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 在两组单位正交基之下的矩阵相似 正交.

ii). $A\sim_o B \Rightarrow A\sim_s B$ 且 $A\sim_c B$. 但反过来不对.

正交补

Def. 设 $U\subseteq V$ 子空间, 称 $U^\perp=\{\vec v\in V\mid \forall \vec u\in U, \vec u\cdot\vec v=0\}$ 为 U 的正交补

Prop. i). $U^\perp\subseteq V$ 子空间 ii). $V=U\oplus U^\perp$.

iii) 设 $U=\langle\vec u_1,\cdots,\vec u_s\rangle$, 则 $\vec v\in U^\perp \Leftrightarrow \vec v\cdot\vec u_i=0$, $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$.

iv). $(U^\perp)^\perp=U$.

(作业). v). $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$. vi). $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

注: 求 U 的正交补 $U^\perp=\{\vec v\in V\mid \vec v\cdot\vec u_i=0, i=1,\cdots,s\}\subseteq V=\mathbb{R}^n$.

则 $U^\perp=\mathrm{sol}\left(\begin{pmatrix}\vec u_1^t\\ \vdots\\ \vec u_s^t\end{pmatrix}\right)$ 解空间. 求 $AX=0$ 的解空间的补 $W^\perp$

$A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix}$. 则 $W^\perp=\langle A_1^t,\cdots,A_n^t\rangle$

伴随算子.

Def. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathcal{A}\in L(V)$. 设 $\mathcal{A}^*\in L(V)$ s.t. $\mathcal{A}(\vec x)\cdot\vec y=\vec x\cdot\mathcal{A}^*(\vec y)$

对 $\forall\vec x,\vec y\in V$ 成立, 则称 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

Thm. (i). $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$. $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\circ\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$.

(ii). $\mathcal{A}$的伴随算子存在且唯一.

(iii). 设$\mathcal{A}$在V的某组单位正交基下矩阵为A, 则$\mathcal{A}^*$在该基下矩阵为A^t.

正规算子、正规矩阵.

Def. 设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 如果$\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}$, 则称$\mathcal{A}$为正规算子.

$A\in M_n(\mathbb{R})$. 若$A^tA=AA^t$, 则称A是正规矩阵.

注: 正规算子在单位正交基下的矩阵~~均~~为正规矩阵

对称算子、斜对称算子、正交算子均为正规算子, 在单位正交基下分别对应 对称矩阵、斜对称矩阵、正交矩阵.

Prop: 设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 正规算子, $\lambda_1,\lambda_2\in spec(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1}\perp V^{\lambda_2}$.

(V是线性空间, $\lambda_1\neq\lambda_2$. 有 $\underbrace{V^{\lambda_1}与V^{\lambda_2}}_{直和关系}$中向量线性无关).

⇒. 给定一个对称矩阵$A\in SM_n(\mathbb{R})$, 求正交矩阵$P\in O_n(\mathbb{R})$. s.t. P^tAP=对角阵.

正规算子的正交相似标准型.

∀ $A\in M_n(\mathbb{R})$正规矩阵. $A \sim_o \begin{pmatrix} N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $N_2(\alpha_i,\beta_i)=\begin{pmatrix}\alpha_i & -\beta_i\\ \beta_i & \alpha_i\end{pmatrix}$, $(i=1,\cdots,s)$, $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$ 且 $\beta_i\neq 0$, $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$.

则 $spec(A)=\{\alpha_i\pm\beta_i\sqrt{-1},\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\}$.

特别地. i). A为对称矩阵. 则 $A\sim_o\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R})$. $spec(A)\subseteq\mathbb{R}$.

A正定 $\Leftrightarrow$ $spec(A)\in\mathbb{R}^+$

注: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$正规, 若$V$是$\mathcal{A}$-不可分的, 则 $\dim V\leq 2$.

进一步若 $\dim V=2$, 则$\mathcal{A}$在V的某组单位正交基下的矩阵为$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$.

ii). A 是斜对称矩阵，则 $A \sim_0 \begin{pmatrix} N_2(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 其中 $\beta_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

且 $spec(A) = \{\pm \beta_i \sqrt{-1}, 0\}$

iii). A 是正交矩阵，则 $A \sim_0 \begin{pmatrix} N_2(\cos\theta_1, \sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N_2(\cos\theta_s, \sin\theta_s) & & \\ & & & E_k & \\ & & & & -E_l \end{pmatrix}$
$\in O_n(\mathbb{R})$.

其中 $2s+k+l=n$，$\theta_i \neq m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$. $spec(A) = \{\underbrace{\cos\theta_i \pm \sqrt{-1}\sin\theta_i, \pm 1}_{\text{模长为}1}\}$.

注：$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为正交算子(保内算子). $\forall \vec{x},\vec{y} \in V$, $\vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}\cdot\mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \forall \vec{x}\in V, |\vec{x}| = |\mathcal{A}\vec{x}|$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在单位正交基下的矩阵为正交矩阵.

eg. 设 A. B 是正交矩阵. $\det(A)+\det(B)=0$. 证明 $A+B$ 不可逆.

Pf: $\because A \in O_n(\mathbb{R})$，$\therefore A^t = A^{-1}$ 可逆. 要证 $A+B$ 不可逆，只要证 $A^t(A+B)$ 不可逆即可. 即 $E+A^tB$，$|A^tB| = |A^t|\cdot|B| \overset{|B|=-|A|}{=} -|B|^2 = -1$.

只要证 $E+C$ 不可逆，其中 $C\in O_n(\mathbb{R})$ 且 $|C|=-1$.

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tCP = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \begin{pmatrix}\cos\theta_s & -\sin\theta_s \\ \sin\theta_s & \cos\theta_s\end{pmatrix} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \triangleq D$.

$|N_2(\cos\theta, \sin\theta)| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$-1 = |C| = |P^tCP| \Rightarrow -1$ 在 D 的对角线中出现.

$$\therefore |E+C| = |PP^t + PDP^t| = |P||E+D||P^t| = \begin{vmatrix} 1+\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & \\ \sin\theta_1 & 1+\cos\theta_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1+\cos\theta_s & -\sin\theta_s & & \\ & & & \sin\theta_s & 1+\cos\theta_s & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore E+C$ 不可逆

$\therefore A+B$ 不可逆.

□.