第十八次作业.

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ 求 $P\in O_3(\mathbb{R})$, s.t. P^tAP 对角阵、求 A^k. $(k\in\mathbb{Z}^+)$

解: $\chi_A=|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&2&0\\2&t-2&2\\0&2&t-3\end{vmatrix}=(t+1)(t^2-7t+10)=(t+1)(t-5)(t-2)$.

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$

分别计算其特征子空间 $V_{\lambda_i}=\ker(\lambda_iE-A)$, $i=1,2,3$.

得 $V_{\lambda_1}=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}_1=}\rangle$, $V_{\lambda_2}=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}_2=}\rangle$, $V_{\lambda_3}=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}_3=}\rangle$.

经单位化, $\vec{e}_1=\frac{\vec{\varepsilon}_1}{|\vec{\varepsilon}_1|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\frac{\vec{\varepsilon}_2}{|\vec{\varepsilon}_2|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\frac{\vec{\varepsilon}_3}{|\vec{\varepsilon}_3|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

则 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组单位正交基.

令 $P=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, 则 $P\in O_3(\mathbb{R})$, 且 $P^tAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

则 $A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}P^t \Rightarrow A^k=P\begin{pmatrix}(-1)^k&&\\&2^k&\\&&5^k\end{pmatrix}P^t\ \cancel{=\frac{1}{9}\Big((-1)^k\cdot 4+}$

$$\Rightarrow A^k=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}(-1)^k\cdot4+2^{k+2}+5^k & (-1)^k\cdot4-2^{k+1}-2\cdot5^k & (-1)^k\cdot2-2^{k+2}+2\cdot5^k\\ (-1)^k\cdot4+2^{k+1}-2\cdot5^k & (-1)^k\cdot4+2^k+4\cdot5^k & (-1)^k\cdot2+2^{k+1}-4\cdot5^k\\ (-1)^k\cdot2-2^{k+2}+2\cdot5^k & (-1)^k\cdot2+2^{k+1}-4\cdot5^k & (-1)^k+2^{k+2}+4\cdot5^k\end{pmatrix}.$$

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 证明: $A^tA=E \Longleftrightarrow$ A 的列向量构成一组单位正交基.

Pf: 设 $A=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)$ 为列向量.

$$A^tA=\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\,t}\\ \vdots\\ \vec{e}_n^{\,t}\end{pmatrix}(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)=(\vec{e}_i^{\,t}\vec{e}_j)_{n\times n}=E$$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{e}_i^{\,t}\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\in\{1,\cdots,n\}\\0, & i\neq j\end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基. $\square$

3. 设 V 是域 F 上的三维线性空间，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 是 V 的一组基. 设 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性算子，在 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.
计算循环子空间 $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_3$ 的维数.

解：$\mathscr{A}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)A$，即 $(\mathscr{A}\vec{v}_1,\mathscr{A}\vec{v}_2,\mathscr{A}\vec{v}_3)=(\vec{v}_1,\vec{v}_2+\vec{v}_3,\vec{v}_1+\vec{v}_2)$.

$\mathscr{A}^0(\vec{v}_3)=\vec{v}_3$，$\mathscr{A}^1(\vec{v}_3)=\vec{v}_1+\vec{v}_2$，$\mathscr{A}^2(\vec{v}_3)=\mathscr{A}(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$
$=\mathscr{A}^0(\vec{v}_3)+\mathscr{A}^1(\vec{v}_3)$

$\Rightarrow \mathscr{A}^0(\vec{v}_3),\mathscr{A}(\vec{v}_3)$ 是 $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_3$ 的一组基 $\Rightarrow \dim(\underbrace{F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_3}_{\text{循环子空间}})=2$.

令 $W=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_3$，则 $\mu_{\mathscr{A}|_W,\vec{v}_3}=t^2-t-1=\mu_{\mathscr{A}|_W}=\chi_{\mathscr{A}|_W}$

$\mu_{\mathscr{A}|_W,\vec{v}_3}\mid\mu_{\mathscr{A}|_W}$，而 $\deg(\mu_{\mathscr{A}|_W})=\dim W=\deg(\chi_{\mathscr{A}|_W})$

(Prop 7.1, 7.2. 设 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 则 $d=\dim(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v})\Leftrightarrow \vec{v},\mathscr{A}\vec{v},\cdots,\mathscr{A}^{d-1}\vec{v}$ 是 $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基.

$\dim(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v})=\deg(\mu_{\mathscr{A},\vec{v}})$.)

($\mathscr{A}|_W(\vec{v}_3,\mathscr{A}\vec{v}_3)=(\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3)=(\mathscr{A}\vec{v}_3,\vec{v}_3+\mathscr{A}\vec{v}_3)=(\vec{v}_3,\mathscr{A}\vec{v}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}}_{=A}$.

$\chi_A=\chi_{\mathscr{A}|_W}=t^2-t-1=\mu_{\mathscr{A}|_W}$.)

4. 设 $U,W\subseteq V$ 子空间. 证明：
(i). $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$；(ii). $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

Pf: (i). 先证明：若 $U\subseteq V$，则 $U^\perp\supseteq V^\perp$. ($U\subseteq V\Leftrightarrow U^\perp\supseteq V^\perp$).

$\forall\,\vec{x}\in V^\perp$，则对 $\forall\,\vec{y}\in V$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

又 $\forall\,\vec{z}\in U\subseteq V$，则 $\vec{x}\cdot\vec{z}=0$，故 $\vec{x}\in U^\perp$，$V^\perp\subseteq U^\perp$.

$U\subseteq U+W\Rightarrow U^\perp\supseteq(U+W)^\perp$，同理，$W^\perp\supseteq(U+W)^\perp$

$\Rightarrow (U+W)^\perp\subseteq U^\perp\cap W^\perp$

设 $\vec{x}\in U^\perp\cap W^\perp$，则 $\vec{x}\in U^\perp$，且 $\vec{x}\in W^\perp$.

$\forall\,\vec{y}\in U+W$，设 $\vec{y}=\vec{u}+\vec{w}$，其中 $\vec{u}\in U$，$\vec{w}\in W$.

则 $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot(\vec{u}+\vec{w})=\vec{x}\cdot\vec{u}+\vec{x}\cdot\vec{w}=0+0=0$.

故 $x \in (U+W)^\perp$，　$U^\perp \cap W^\perp \subseteq (U+W)^\perp$.

综上，$(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.　　　▥.

(ii). 由 (i) 知，$(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = U \cap W$

则 $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$.　　　▥.

($U = V \Longleftrightarrow U^\perp = V^\perp$).

5. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，且 A 为正定矩阵，B 为非零斜对称矩阵

证明：$|A+B| > |A|$.

Pf: $\because$ A 是正定矩阵，$\therefore$ $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tAP = E$.

又 $\because$ B 为斜对称矩阵，$\therefore$ P^tBP 仍为斜对称矩阵.

$\exists\ Q \in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $Q^t(P^tBP)Q = \begin{pmatrix} N_2(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

而 $Q^tP^tAPQ = Q^tQ = E$　　　其中 $\beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\therefore$ $\left|(PQ)^tA(PQ) + (PQ)^tB(PQ)\right| = \left|E + (PQ)^tB(PQ)\right| = \begin{vmatrix} N_2(1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(1,\beta_s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $|A+B| \cdot |PQ|^2 = \prod_{i=1}^{s}(1+\beta_s^2) > 1$.

又 $|Q|^2 = 1$，且 $|P^tAP| = |E|$ 即 $|A| = \frac{1}{|P|^2}$

$\therefore$ $|A+B| > \frac{1}{|PQ|^2} = \frac{1}{|P|^2} = |A|$.　　　▥.

6. 设 A, B 为 n 阶实对称正定矩阵.

证明：若 $A-B$ 正定，则 $B^{-1} - A^{-1}$ 正定.

Pf: 回顾：设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$，且 A 正定．$\exists\ P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t.

$P^tAP = E$，P^tBP 是对角阵. (Thm 3.3).

断言：A 正定 $\Leftrightarrow$ ~~$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$~~, s.t. ~~$P^tAP=$~~ $A\sim_c \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_i\in\mathbb{R}^+$.

不一定是 A 的特征值.

"$\Leftarrow$" 设 $Q=$ ~~P^t~~ $\in GL_n(\mathbb{R})$. s.t $A=Q^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}^+$.

$\forall\ \vec{x}\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}=(Q\vec{x})^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}(Q\vec{x})>0$ $Q\vec{x}\neq0$ 且 $\lambda_i>0$. $\therefore A$ 正定.

"$\Rightarrow$" A 正定 ~~$\Rightarrow\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $A=P^tP=P^tEP$. $1\in\mathbb{R}^+$~~.

且 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 则 $\forall\vec{x}\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n$. 有 $0<(P\vec{x})^tA(P\vec{x})=\vec{x}^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\vec{x}$. 取 $\vec{x}=\vec{e}_i$, $i=1,\cdots,n$ 即可证 $\lambda_i>0$

下证题目：$\because A,B$ 正定，$\therefore\ \exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tAP=E$

且 $P^tBP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 由于 B 正定，有 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}^+$.

则 $P^t(A-B)P=P^tAP-P^tBP=\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n\end{pmatrix}$.

$\because A-B$ 正定，$\therefore 1-\lambda_i>0$, $i=1,\cdots,n$.

令 $Q^t=P^{-1}$，则 $E=E^{-1}=(P^tAP)^{-1}=Q^tA^{-1}Q$.

$Q^tB^{-1}Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$

则 $Q^t(B^{-1}-A^{-1})Q=Q^tB^{-1}Q-Q^tA^{-1}Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}-1\end{pmatrix}$.

$\because 0<\lambda_i<1$，$\therefore\ \frac{1}{\lambda_i}-1>0$ $\therefore B^{-1}-A^{-1}$ 为正定矩阵（由断言）.

正定 $\neq$ 正交. 正规 $AA^t=A^tA$. A,B 正定 $\not\Rightarrow$ AB 正定，eg: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$A^tA=E$

期末复习

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间. $\mathcal{L}(V)$ 为 $:=\{\varphi: V\to V \mid$ 线性算子$\}$ (F-代数)

1. 不变子空间 可对角化

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $U\subseteq V$ 为子空间. 若 $\mathcal{A}(U)\subseteq U$ 则称 U 是 $\mathcal{A}$-(不变)子空间.

若 U 是 $\mathcal{A}$-子空间 且基底为 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_k$ 可扩充为 V 的一组基 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_k\ \vec{e}_{k+1}\cdots\vec{e}_n$

则 $\mathcal{A}$ 在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$. 若 $\langle\vec{e}_{k+1},\cdots\vec{e}_n\rangle$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间 则矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_3\end{pmatrix}$.

2. 极小多项式. (设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v}\in V$)

1) 算子 $\begin{cases}\mu_{\mathcal{A}} \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的零化多项式中首一的次数最小的多项式.}\\ \text{性质: i) } f(\mathcal{A})=0 \iff \mu_{\mathcal{A}}\mid f\end{cases}$

ii) $\mathcal{A}$ 可逆 $\iff \mu_{\mathcal{A}}(0)\neq 0$

iii) $\dim(F[\mathcal{A}])=\deg(\mu_{\mathcal{A}})$

iv) 若 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2\cdots A_s)$ 则 $\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{A_1}\cdots\mu_{A_s})$

2) 算子+向量 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 是满足 $P(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$ 的 $P(t)\in F[t]$ 中首一次数最小的多项式.

性质: i) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一

ii) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\mid\mu_{\mathcal{A}}$ 且 $\exists\vec{w}\in V$ s.t. $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}=\mu_{\mathcal{A}}$.

iii) $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})=\deg(\mu_{\mathcal{A},\vec{v}})=d$

iv) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\langle\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v})\cdots\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})\rangle$ (循环子空间) $\uparrow$ $\mathcal{A}$-不变子空间.

注: $\mu_{\mathcal{A}|_{F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}}}=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\chi_{\mathcal{A}|_{F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}}}$

3. 特征向量. 特征值. 特征子空间. 特征多项式.

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 若 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ s.t. $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ $(\exists\lambda\in F)$ 则称 $\vec{v}$ 为 $\mathcal{A}$ 特征向量.

称 λ 为对应特征值 (可以为0). $V^\lambda:=\{\vec{v}\in V\mid\mathcal{A}\vec{v}=\lambda\vec{v}\}=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ 称为

关于 λ 的特征子空间 ($\mathcal{A}$-不变) 且 注: $\vec{v}$ 是特征向量 $\iff\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

$\chi_A=|tE-A|$ (A 为 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵. $\because\chi_A$ 相似不变 $\therefore$ 可记为 $\chi_{\mathcal{A}}$)

<u>Thm</u> λ 为 $\mathcal{A}$ 特征值 $\iff\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=0$

$(t-\lambda)$ 在 $\chi_{\mathcal{A}}$ 中的重数 $\longrightarrow$ 代数重数 $\geqslant\dim V^\lambda\longrightarrow$ 几何重数 $\geqslant 1$

Thm2 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化（$\exists$一组基 s.t. 矩阵为对角阵 或 $A\sim_s\Lambda$）

$\Leftrightarrow$ $V=\underset{\langle\vec v_{11}\cdots\vec v_{1,i_1}\rangle}{V^{\lambda_1}}\oplus\cdots\oplus\underset{\langle\vec v_{s1}\cdots\vec v_{s,i_s}\rangle}{V^{\lambda_s}}$ （$\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 为 $\mathcal{A}$ 全部两两不同特征值）

（$\mathcal{A}$ 在 $\{\vec v_{11}\cdots\vec v_{s i_s}\}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}\Lambda_{i_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_{i_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$）

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

$\Leftrightarrow$ $\chi_{\mathcal{A}}$ 的所有根 $\in F$ 且 几何重数 $=$ 代数重数.

$\Leftrightarrow$ $\mu_{\mathcal{A}}$ 所有根 $\in F$ 且 无重根 (ie $\gcd(\mu_{\mathcal{A}},\mu_{\mathcal{A}}')=1$)

Thm3 (Cayley-Hamilton) $\forall\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}\mid\chi_{\mathcal{A}}$ 且 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的根 都是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的根.

4. Jordan 标准型.

$\forall A\in M_n(\mathbb{C})$ $\exists!$（不计排序）$J_A\in M_n(\mathbb{C})$ 由若干 Jordan 块构成 s.t. $A\sim_s J_A$.

算法：$\chi_A=|tE-A|=(t-\lambda_1)^{l_1}\cdots(t-\lambda_s)^{l_s}$ 或 $\mu_A=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$

$N(\lambda_i)=\dim V^{\lambda_i}=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)$ 几何重数（几块）

$N(\lambda_i,j)=\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^{j+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^{j-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^j$ $(j=1,2\cdots)$

至 $N(\lambda_i)=\sum_{j=1}^{k}N(\lambda_i,j)$ （$J_j(\lambda_i)$ 有 $N(\lambda_i,j)$ 块）排成对角阵.

l_i（代数重数）代表 J_A 中 λ_i 出现 l_i 次. m_i 代表 J_A 中 ~~出现 $J_{m_i}(\lambda_i)$ 且最大~~ 以 λ_i 为特征值的Jordan块最大阶数.

Thm $A\sim_s B$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(B)=\{\lambda_1\cdots\lambda_s\}$ 且 $\operatorname{rank}(A-\lambda_iE)^k=\operatorname{rank}(B-\lambda_iE)^k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ ~~$(\forall k\in\mathbb{N})$~~

5. 欧氏空间.

V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间. $\cdot: V\times V\to\mathbb{R}$ 是正定 对称的双线性型（内积）称 $(V,\cdot)$ 为欧氏空间

☆ $\begin{cases}|\vec v|=\sqrt{\vec v\cdot\vec v} & \text{长度}\\ |\vec v_1-\vec v_2| & \text{距离}\\ \cos\theta=\dfrac{\vec v_1\cdot\vec v_2}{|\vec v_1|\,|\vec v_2|} & \text{夹角}\end{cases}$

单位正交基 $\vec e_1\cdots\vec e_n$ s.t. $\vec e_i\cdot\vec e_j=\delta_{ij}$（Gram-Schmit 正交化）求解空间补的单位正交基（17次作业 2, 5）

正交补 $U\subseteq V$ 则 $U^\perp:=\{\vec v\in V\mid\vec u\cdot\vec v=\vec 0\ \forall\vec u\in U\}$ $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$ $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$

性质：$V=U\oplus U^\perp$ $(U^\perp)^\perp=U$.

正交矩阵 $A\cdot A^t=E$ (ie $A^t=A^{-1}$) 正交相似：$\exists$正交矩阵P s.t. $\underset{=P^tAP}{P^{-1}AP}=B$ 记为 $A\sim_o B$

正规矩阵 $A\cdot A^t=A^t\cdot A$ $A\sim_o\begin{pmatrix}N_2(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N_2(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\alpha_i,\lambda_j\in\mathbb{R}$ $\beta_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $N_2(\alpha_i,\beta_i)=\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i\end{pmatrix}$

（对称，斜对称，正交）

↓

正交相似对角化

$\chi_A(t)=\prod_i\left(t^2-2\alpha_it+(\alpha_i^2+\beta_i^2)\right)\cdot\prod_j(t-\lambda_j)$