1. 解：二次插值多项式 $f(x)$ 过点 $(1,0)$, $(-1,-3)$, $(2,4)$

方2 则 $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}\cdot 0 + \dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}\cdot(-3) + \dfrac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}\cdot 4$

方1 解方程组 $= \dfrac{5}{6}x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{3}$

(注 (Lagrange插值)
过点 (x_1,y_1), …, (x_n,y_n) 的 $n-1$ 次多项式形如：

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$
)

2. 设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$

解：若 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 中有2个相等时 则行列式中有2行相同 $\therefore D_n=0$

下面不妨设 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 两两不同.

(法一：构造法)

考虑如下线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}$$

其系数矩阵的行列式为 n阶 Vandermonder 行列式 $\Delta = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i) \neq 0$

$\therefore$ 方程组有唯一解. 且由 Cramer 法则 $x_{n-1} = \dfrac{D_n}{\Delta}$

下面考虑 n次多项式 $f(y) = y^n - x_{n-1}y^{n-1} - \cdots - x_1 y - x_0$

由上述线性方程组可知 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 为 $f(y)=0$ 的 n个两两不同的根

再由 Vieta 定理 可知 $x_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{D_n}{\Delta}$

$\therefore D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$

(法二：加边法)

对 D_n 加一行一列转化为 Vandermonder行列式如下：

$$D_{n+1}(y) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(y-a_i)$$

按最后一行展开时 y^{n-1} 的系数为 $(-1)^{n+n+1}D_n$

$\therefore +D_n = +\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ □.

3. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ $\because$ 3, 7, 8 两两互素 $\therefore$ 上述同余方程有解.

设 $M = 3\cdot 7\cdot 8 = 168$, $M_1 = \frac{M}{3} = 56$, $m_1 = 3$. $m_2 = 7$

$M_2 = \frac{M}{7} = 24$, $M_3 = \frac{M}{8} = 21$. $m_3 = 8$.

利用扩展欧几里德算法 计算 $u_i m_i + v_i M_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$)

得到 $\begin{cases} -M_1 \equiv 1 \pmod 3 & (19m_1 - M_1 = 1) \\ -2M_2 \equiv 1 \pmod 7 & (7m_2 - 2M_2 = 1) \\ -3M_3 \equiv 1 \pmod 8 & (8m_3 - 3M_3 = 1) \end{cases}$

则同余方程组的通解为 $x = 2\cdot(-1)M_1 + 4(-2)M_2 + 5(-3)M_3 + kM$ $(k \in \mathbb{Z})$

整理得 $x = -619 + k\cdot 168$ 取 $k=4$ 即得 $x = 53$ 为满足题意的最小正整数.

4. (柯 P162. 3) $f \in F[x_1, \cdots x_n]$ 是 m 次形式 (m 次齐次多项式)

$\Longleftrightarrow$ $f(tx_1, \cdots tx_n) = t^m f(x_1, \cdots x_n)$ 其中 t 是新变元.

Pf. ($\Rightarrow$) 设 f 为 m 次形式 不妨设 $f = \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ 其中 $i_1 + \cdots + i_n = m$

则 $f(tx_1, \cdots tx_n) = \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \cdots i_n} (tx_1)^{i_1} \cdots (tx_n)^{i_n} = t^m \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$

$= t^m f(x_1, \cdots x_n)$

($\Leftarrow$) 设 $f(tx_1, \cdots tx_n) = t^m f(x_1 \cdots x_n)$ 再设 $f = f_k + f_{k-1} + \cdots + f_1 + f_0$

其中 $k = \deg(f)$ 且 f_i 为 i 次形式 ($i = 0, 1, \cdots k$) 易知 上述分解形式唯一.

则 $f(tx_1, \cdots tx_n) = f_k(tx_1, \cdots tx_n) + \cdots + f_1(tx_1 \cdots tx_n) + f_0(tx_1, \cdots tx_n)$

由 ($\Rightarrow$) 可知 $f_i(tx_1, \cdots tx_n) = t^i f_i(x_1, \cdots x_n)$ $(i = 0, 1, \cdots k)$

$\therefore t^m f(x_1, \cdots x_n) = t^k f_k(x_1, \cdots x_n) + \cdots + t f_1(x_1, \cdots x_n) + f_0(x_1, \cdots x_n)$

$\overset{t^m f}{\cancel{t^m(f_k + \cdots + f_1 + f_0)}} = t^k f_k + \cdots + t f_1 + f_0$

$\therefore t^k f_k + \cdots + t^m(f_m - f) + \cdots + t f_1 + f_0 = 0 \in F[x_1, \cdots x_n][t]$

$\Rightarrow f_i = 0$ $(i \neq m)$ 且 $f_m = f$ $\Rightarrow$ f 为 m 次形式 □.

5.(陈 P184.3) 多项式 $x^3-7x+\lambda$ 有两个根比值为 2. 求 λ

解. 设多项式的根为 $\alpha, 2\alpha, \beta$

由 ~~Veta~~ Vieta 定理可知
$$\begin{cases} \alpha+2\alpha+\beta=0 \\ \alpha\cdot 2\alpha+\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\beta=-7 \\ \alpha\cdot 2\alpha\cdot\beta=-\lambda \end{cases}$$

可得
$$\begin{cases} \alpha^2=1 \\ \beta=-3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{cases}$$

又 $\lambda=-2\beta$ $\quad\therefore \lambda=\pm 6$

6. 全次数为 m 的 n 变元单项式的个数为 $\binom{m+n-1}{m}$

证 (双重归纳) 1 次的 n 变元单项式为 $\{t_1, t_2 \cdots t_n\}$ 共 n 个 且 $n=\binom{1+n-1}{1}=\binom{n}{1}$

m 次的 1 元单项式为 $\{t_1^m\}$ 共 1 个 且 $1=\binom{m+1-1}{m}=\binom{m}{m}$

$\therefore$ 命题在 $(1,n)$, $(m,1)$ 时均成立. 下面假设全次数为 m 的 $n-1$ 元单项式的个数为 $\binom{m+(n-1)-1}{m}$, 全次数为 $m-1$ 的 n 元单项式的个数为 $\binom{m-1+n-1}{m-1}$

~~所~~我们看全次数为 m 的 n 元单项式 我们分成两部分来看:

1) 如果变元 t_n 不出现 此时个数 $=\binom{m+(n-1)-1}{m}$ (m 次 $n-1$ 元单项式个数)

2) 如果变元 t_n 的次数至少为 1. 此时单项式形如 $t_1^{d_1}\cdots t_n^{d_n}$ 满足 $d_1,\cdots d_{n-1}\geq 0$, $d_n\geq 1$. 且 $d_1+\cdots+d_n=m \Rightarrow d_1+\cdots+d_{n-1}+(d_n-1)=m-1$ 相当于 $m-1$ 次 n 元单项式.

$\therefore$ 此时所有单项式个数 $=\binom{(m-1)+n-1}{m-1}$

$\therefore$ m 次 n 元单项式个数为 $\binom{m+(n-1)-1}{m}+\binom{m-1+n-1}{m-1}=\binom{m+n-1}{m}$. 命题得证.

(组合法 $S=\{$所有全次数为 m 的 n 元单项式$\}=\{t_1^{d_1}\cdots t_n^{d_n} \mid d_1+\cdots+d_n=m,\ d_1,\cdots d_n\in\mathbb{N}\}$

$\therefore \#S=\#\{(d_1\cdots d_n)\in\mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n d_i=m\}$

$=\#\{(d_1'\cdots d_n')\in\mathbb{Z}^+ \mid \sum_{i=1}^n d_i'=m+n\}$

$=\#\{$将 $m+n$ 个小球分成 n 份且每份至少有一个小球$\}$

$=\#\{$在 $m+n-1$ 个间隙中插入 $n-1$ 个隔板$\}$

$=\binom{m+n-1}{n-1}=\binom{m+n-1}{m}$ $\square$.

一元多项式的重因子

设 F 为特征 0 的域，$F[x]$ 为域 F 上的一元多项式环.

Def 1 设 $p \in F[x] \setminus F$ 为非平凡多项式. $f \in F[x]$ 为任意多项式

若 $\exists\ k \in \mathbb{N}$ s.t. $p^k \mid f$ 且 $p^{k+1} \nmid f$

则称 p 为 f 的 k 重因子.

特别地，若 p 是不可约的，则称 p 为 f 的 k 重不可约因子.

注. 若 $k=0$ 则 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因子

若 $k=1$ 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因子

若 $k>1$ 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因子.

Def 2 设 R 为环，若映射 $' : R \to R$ 满足：对 $\forall\ a, b \in R$

i) $(a+b)' = a' + b'$ ii) $(a \cdot b)' = a'b + ab'$ (Leibniz 法则)

则称映射 $'$ 为环 R 上的导数 (derivation)

集合 $C_R := \{ c \in R \mid c' = 0 \}$ 称为 R 的常数子环 (自己验证)

Prop 1 设映射 $' : F[x] \longrightarrow F[x]$ 为 $F[x]$ 上的导数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (i a_i) x^{i-1}$$

且 F 为 $F[x]$ 关于导数 $'$ 的常数域.

Pf. $\forall\ f, g \in F[x]$，设 $n = \max(\deg(f), \deg(g))$ 且 $f = a_n x^n + \cdots + a_0$, $g = b_n x^n + \cdots + b_0$

$$(f+g)' = \left(\sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i) x^i\right)' = \sum_{i=0}^{n} i(a_i+b_i) x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^{n} i b_i x^{i-1} = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = \left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right)\right]' = \left[\sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \le i,j \le n}} a_i b_j\right) x^k\right]' = \sum_{k=0}^{2n} \left(k \sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} (i+j) a_i b_j\right) x^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} i a_i b_j x^{(i-1)+j} + \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} j a_i b_j x^{i+(j-1)}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} j b_j x^{j-1}\right) = f'g + fg' \quad \square$$

Prop 2 给定多项式 $f\in F[x]\setminus F$. 若非平凡不可约多项式 $p\in F[x]\setminus F$ 是 f 的 k 重因子 $(k>0)$. 则 p 是 f' 的 $k-1$ 重因子

Pf. 由 k 重因子定义可知 $\exists\ q\in F[x]$ s.t. $f=p^k\cdot q$ 且 $\gcd(p,q)=1$

则 $f'=(p^k\cdot q)'=(p^k)'q+p^k\cdot q'=kp^{k-1}\cdot p'q+p^kq'$ (归纳法易证)

显然 $p^{k-1}\mid f'$. 假设 $p^k\mid f'$ 则 $p\mid(kp'q+pq')\Rightarrow p\mid kp'q$

$\because \gcd(p,q)=1$ 且 p 非平凡 $\therefore p\mid p'$ 又由导数定义 $\deg(p')=\deg(p)-1$

$\therefore$ 只可能 $p'=0$ 即 $p\in F$ 与 p 非平凡矛盾 $\therefore p^k\nmid f'$

综上 p 是 f' 的 $(k-1)$ 重因子 □.

Cor 1 不可约 p 是 f 的 k 重因子 $\iff$ p 是 $f, f', f'', \cdots f^{(k-1)}$ 的因子

但 p 不是 $f^{(k)}$ 的因子.

Thm 1 设 $f\in F[x]\setminus F$. 则 f 有重因子 $\iff$ $\gcd(f,f')$ 非平凡. i.e. $\in F[x]\setminus F$

Pf. ($\Rightarrow$) 设不可约非平凡多项式 p 为 f 的 k 重因子且 $k\geq 2$

由 Prop 2 可知 p 为 f' 的 $k-1$ 重因子 $\therefore p\mid f'$ $\Rightarrow p\mid\gcd(f,f')$

($\Leftarrow$) $\because \gcd(f,f')$ 非平凡. 不妨设 p 为其一个不可约因子 即 $p\mid f$ 且 $p\mid f'$

由 Cor 1 p 至少是 f 的 2 重因子 $\therefore f$ 有重因子. □.

设 $f\in F[x]\setminus F$ 的标准不可约因式分解为 $f=c\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$

则 $g=\gcd(f,f')=p_1^{m_1-1}\ p_2^{m_2-1}\ \cdots\ p_s^{m_s-1}$, $\dfrac{f}{\gcd(f,f')}=c\,p_1p_2\cdots p_s$

$\therefore$ 仅通过多项式除法(求 gcd 只用辗转相除)可得到 f 的全部不可约因子.

则对每个因子 p_i
- 方1 求 p_i 在 g 中重数 s.t. $p_i^{k-1}\mid g$ 但 $p_i^k\nmid g$ $\Rightarrow$ p_i 在 f 中重数为 k
- 方2 求 f 的最高阶导数 s.t. $p_i\mid f^{(k-1)}$ 但 $p_i\nmid f^{(k)}$

抽象线性空间

1.定义. 设域 F 交换群 $(V, +, \vec{0})$ 映射 $\cdot: F\times V \longrightarrow V$ 满足 $\forall \alpha,\beta\in F$, $\vec{v}\in V$

i) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$ (结合律) ii) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$ (则称 $\cdot$ 为数乘)

且对 $\forall \alpha,\beta\in F$, $\vec{v},\vec{w}\in V$ $\begin{cases}(\alpha+\beta)\cdot\vec{v} = \alpha\vec{v}+\beta\vec{v} \\ \alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}\end{cases}$ (分配律)

则称 V 是 F 上线性空间

2. 子空间: $W\subseteq V$ 满足 $\forall \vec{x},\vec{y}\in W$, $\alpha,\beta\in F$ $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W$ (对加法,数乘封闭)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则

$\left.\begin{aligned} W_1+W_2 &:= \{\vec{v_1}+\vec{v_2} \mid \vec{v_1}\in W_1, \vec{v_2}\in W_2\} \\ W_1\cap W_2 &:= \{\vec{v} \mid \vec{v}\in W_1 \text{ 且 } \vec{v}\in W_2\}\end{aligned}\right\}$ 都是 V 的子空间

但 $W_1\cup W_2$ 不一定是子空间

<u>引理</u>: 若 W_1 和 W_2 互不包含(即 $W_1\nsubseteq W_2$ 且 $W_2\nsubseteq W_1$) 则 $W_1\cup W_2$ 不是 V 子空间.

证明: (反证法) 假设 $W_1\cup W_2$ 是 V 中子空间

$\because W_1\nsubseteq W_2$ $\therefore \exists\ \vec{v_1}\in W_1$ s.t. $\vec{v_1}\notin W_2$ 同理 $\exists\ \vec{v_2}\in W_2\setminus W_1$.

取 $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$ $\because$ $\vec{v_1},\vec{v_2}\in W_1\cup W_2$ 且 $W_1\cup W_2$ 为子空间 $\therefore \vec{v}\in W_1\cup W_2$.

则 $\vec{v}\in W_1$ 或 $\vec{v}\in W_2$. 如果 $\vec{v}\in W_1$ 则 $\vec{v_2} = \vec{v}-\vec{v_1}\in W_1$ ($\because W_1$ 是子空间)

与 $\vec{v_2}\notin W_1$ 矛盾 同理 如果 $\vec{v}\in W_2$ 则与 $\vec{v_1}\notin W_2$ 矛盾. $\therefore W_1\cup W_2$ 不是子空间 □

3. 子空间直和: 设 $V_1,\cdots V_s\subseteq V$ 为子空间 如果和空间 $U=V_1+\cdots+V_s$ 满足

$\forall\ \vec{u}\in U$ $\exists!$ 一组 $(\vec{v_1},\cdots\vec{v_s})\in V_1\times\cdots\times V_s$ s.t. $\vec{u}=\vec{v_1}+\cdots+\vec{v_s}$

则称 U 为 $V_1\cdots V_s$ 的直和 记为 $U=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$.

<u>命题</u>: $U=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\vec{v_i}\in V_i$ s.t. $\sum_{i=1}^{s}\vec{v_i}=\vec{0}$ 则 $\vec{v_i}=\vec{0}\ (i=1,\cdots s)$

$\Leftrightarrow$ $V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)=\{\vec{0}\}$ $(i=1,\cdots s)$

eg1. 直和不满足消去律.

Pf. 考虑线性空间 $V=\mathbb{R}^2$, $U=\langle\binom{0}{1}\rangle$, $W_1=\langle\binom{1}{0}\rangle$, $W_2=\langle\binom{1}{1}\rangle$ 均为 V 子空间

易证 $U+W_1=U+W_2=V$ 且 $\forall\ \vec{v}\in U\cap W_1$ 即 $\vec{v}=\binom{0}{a}=\binom{b}{0}\Rightarrow\vec{v}=\binom{0}{0}$

$\therefore U\cap W_1=\{\vec{0}\}$ 同理可证 $U\cap W_2=\{\vec{0}\}$ $\therefore U\oplus W_1=U\oplus W_2=V$

但 $W_1\neq W_2$ □.

eg2. 设 $V=\mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R}):=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为映射(函数)$\}$

$\tilde{E}=\{f\in V\mid f$ 为偶函数$\}$ $\tilde{O}=\{f\in V\mid f$ 为奇函数$\}$

证明 $\tilde{E},\tilde{O}$ 为 V 的子空间 且 $V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$.

Pf. $\forall\ f,g\in\tilde{E}$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$

$\therefore \alpha f+\beta g\in\tilde{E}$. 同理 $\forall\ f,g\in\tilde{O}$, $(\alpha f+\beta g)(-x)=-\alpha f(x)-\beta g(x)=-(\alpha f+\beta g)(x)$

$\therefore \alpha f+\beta g\in\tilde{O}$ 由子空间定义 $\tilde{E},\tilde{O}$ 均为 V 的子空间. 下面证直和.

$\forall\ f\in V$ 显然 $f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\in\tilde{E}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\in\tilde{O}}$ $\therefore V=\tilde{E}+\tilde{O}$.

设 $f\in\tilde{E}\cap\tilde{O}$ 即 $f(-x)=f(x)=-f(x)\Rightarrow 2f(x)=0$ $\because \mathrm{char}(\mathbb{R})=\infty\neq 2$ $\therefore f(x)=0$

$\therefore \tilde{E}\cap\tilde{O}=\{0\}$ 综上 $V=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$. □