席 P4. 9(3) $M := \{A \in M_n(K) \mid |A| = 0\}$ 不是 $M_n(K)$ 中子空间

∵ 例如 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ 都满足 $|A_1| = 0$. $|A_2| = 0$ 但 $|A_1 + A_2| = 1$

∴ M 对加法不封闭 ∴ M 不是线性子空间.

(4) $M := \{A \in M_n(K) \mid tr(A) = 0\}$ 是 $M_n(K)$ 的子空间.

Pf. $\forall A, B \in M$, $\alpha, \beta \in K$ 设 $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ 且 $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$

则 $tr(\alpha A + \beta B) = tr((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$

∴ $\alpha A + \beta B \in M$ 即 M 是 $M_n(K)$ 的子空间.

P5. 13. 交换群 A 成为域 $\mathbb{Z}_p$ 上的向量空间 $\Longleftrightarrow \forall x \in A$, $px = 0$.

Pf. (⇒) 如果 A 是 $\mathbb{Z}_p$ 上线性空间 则 $\forall x \in A$ $\bar{1} \cdot x = x$ 且满足:

$$0 = \bar{0} \cdot x = \bar{p} \cdot x = \underbrace{(\bar{1} + \cdots + \bar{1})}_{p个} \cdot x \overset{分配律}{=} \underbrace{\bar{1} \cdot x + \cdots + \bar{1} \cdot x}_{p个} = px$$

(⇐) 定义数乘 $\cdot : \mathbb{Z}_p \times A \longrightarrow A$

$$(\bar{m}, x) \longmapsto mx$$

1) 验证良定义: 若 $\bar{m} = \bar{n}$ 则 $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $m = n + kp$

∵ $\forall x \in A$ 都有 $px = 0$ ∴ $\bar{m} \cdot x = mx = (n+kp)x = nx = \bar{n} \cdot x$ 即良定义.

2) 恒性: $\bar{1} \cdot x = x$ (由定义)

结合律: ~~$(\bar{m}\bar{n})x = \bar{m}(\bar{n}x)$~~ 设对 $\forall \bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}_p$

设 $\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{r}$ 则 $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $mn = r + kp$ ∴ $(\bar{m} \cdot \bar{n}) \cdot x = rx = (r+kp)x$

$= mnx = m(nx) = m(\bar{n} \cdot x) = \bar{m} \cdot (\bar{n} \cdot x)$ 结合律成立.

分配律: ① 对 $\forall \bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}_p$ 设 $\bar{m} + \bar{n} = \bar{r}$ 则 $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $m + n = r + kp$

∴ $(\bar{m} + \bar{n}) \cdot x = \bar{r} \cdot x = rx = (r+kp)x = (m+n)x = mx + nx = \bar{m} \cdot x + \bar{n} \cdot x$

② $\bar{m} \cdot (x+y) = m(x+y) = mx + my = \bar{m} \cdot x + \bar{m} \cdot y$

综上: A 在数乘 · 下构成 $\mathbb{Z}_p$ 上线性空间 □.

P18. 4. 设 $U.V.W$ 为同一个线性空间的子空间. 则 $U\cap(V+W)=(U\cap V)+(U\cap W)$不成立.

Pf. 显然 $U\cap V\subseteq U\cap(V+W)$. $U\cap W\subseteq U\cap(V+W)$

$\therefore (U\cap V)+(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$ 但反过来包含关系不成立.

例如: 设 $U=\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$, $V=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$. $W=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

$\forall\ \vec{v}\in U\cap V$ 即 $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$ $\therefore U\cap V=\{\vec{0}\}$.

同理 $U\cap W=\{\vec{0}\}$ 但 $V+W=\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$ 且 $U\subseteq V+W$

$\therefore U\cap(V+W)=U=\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$ 此时 $U\cap(V+W)\supsetneq(U\cap V)+(U\cap W)$ □.

4. 设 F 为域 $SM_n(F)=\{A\in M_n(F)\mid A$为对称矩阵$\}$

$UM_n(F)=\{A\in M_n(F)\mid A$为上三角矩阵$\}$

证明 $M_n(F)=SM_n(F)\oplus UM_n(F)$

Pf. 对 $\forall\ A\in M_n(F)$ 设 $A=(a_{ij})$ 令 $S=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$为对称矩阵

$U=\begin{pmatrix}0&a_{12}-a_{21}&\cdots&a_{1n}-a_{n1}\\&0&\cdots&a_{2n}-a_{n2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&0\end{pmatrix}$ 为上三角矩阵 显然 $A=S+U$

$\therefore M_n(F)=SM_n(F)+UM_n(F)$

对 $\forall\ A\in SM_n(F)\cap UM_n(F)$ $\because A=(a_{ij})\in UM_n(F)$ $\therefore a_{ij}=0$ 对 $\forall\ i>j$

又 $\because A\in SM_n(F)$ $\therefore a_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall\ i,j$ 成立 $\therefore a_{ij}=0$ 对 $\forall\ i,j$ 成立

$\therefore A=0$ 即 $SM_n(F)\cap UM_n(F)=\{0\}$ $\therefore M_n(F)=SM_n(F)\oplus UM_n(F)$.

5. 设 $V=\mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\tilde{E}_0=\{f$是偶函数且$f(0)=0\}$. $\tilde{C}=\{$常函数$\}$ $\tilde{O}=\{$奇函数$\}$

则 $\tilde{E}_0.\ \tilde{C}.\ \tilde{O}$ 都是 V 的子空间 且 $V=\tilde{E}_0\oplus\tilde{C}\oplus\tilde{O}$

Pf. 以 $\tilde{E}_0$为例: $\forall\ f.g\in\tilde{E}_0$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$

$\therefore(\alpha f+\beta g)(-x)=(\alpha f+\beta g)(x)\Rightarrow$为偶函数且 $(\alpha f+\beta g)(0)=\alpha f(0)+\beta g(0)=0$

$\therefore\alpha f+\beta g\in\tilde{E}_0$. $\Rightarrow\tilde{E}_0$为线性子空间. $\tilde{C}.\ \tilde{O}$ 同理.

记 $\tilde{E} := \{ f \in V \mid f$ 是偶函数$\}$ $\forall f_c \in \tilde{C}$, i.e. $f_c(x) = c$ 有 $f_c(x) = f_c(-x) = c$

$\therefore \tilde{C} \subseteq \tilde{E}$ 下面证 $\tilde{E} = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C}$

首先. $\forall f \in \tilde{E}$ 为偶函数 设 $f(0) = c$ 显然 $f(x) = c + (f(x) - c)$

记 $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $[x \mapsto c]$ $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $[x \mapsto f(x) - c]$

则 f_c 为常函数 即 $f_c \in \tilde{C}$. 且 $\because f_0(0) = f(0) - c = 0$ $\therefore f_0 \in \tilde{E}_0$

则 $f(x) = f_c(x) + f_0(x)$ 其中 $f_c \in \tilde{C}$. $f_0 \in \tilde{E}_0$. $\therefore \tilde{E} = \tilde{C} + \tilde{E}_0$

另外 对 $\forall g \in \tilde{E}_0 \cap \tilde{C}$, $\because g \in \tilde{E}_0$ $\therefore g(0) = 0$ 又 $\because g \in \tilde{C}$ $\therefore \forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = g(0) = 0$ 则 g 为零映射. $\therefore \tilde{E}_0 \cap \tilde{C} = 0$ 则 $\tilde{E} = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C}$.

由上周习题课证明 $V = \tilde{E} \oplus \tilde{O}$ $\therefore V = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{C} \oplus \tilde{O}$ □.

6. (P8. 5) $f_1, \cdots f_n \in$ ~~E~~ Func($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$) 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\exists a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ s.t. $|(f_i(a_j))| \neq 0$.

Pf. ($\Leftarrow$) 假设 $f_1, \cdots f_n$ 线性相关. 则 $\exists$ 不全为0的 $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ (零映射) 则对 $\forall a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$. $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i)(a_j) = 0$ $(\in \mathbb{R})$

即 $\sum_{i=1}^{n} f_i(a_j) \cdot \lambda_i = 0 \Rightarrow (f_i(a_j)) \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ $\left(\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\right)$. $(*)$

$\because \lambda_1, \cdots \lambda_n$ 不全为0. $\therefore$ 方程组 $(*)$ 有非零解 $\therefore |(f_i(a_j))| = 0$ 矛盾.

($\Rightarrow$) [归纳法] $n=1$ 时 f_1 线性无关 即 $f_1 \neq 0 \Rightarrow \exists a_1 \in \mathbb{R}$ s.t. $f_1(a_1) \neq 0$.

假设对 $n-1$ 成立. 对 $f_1, \cdots f_n \in$ Func($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$) 假设 $\forall a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$ $|(f_i(a_j))| = 0$

设 $B_{n-1}^{(a_1, \cdots a_{n-1})} = (f_i(a_j))_{(n-1)(n-1)}$ 如果 $f_1, \cdots f_{n-1}$ 线性相关. 则 $f_1, \cdots f_n$ 线性相关. 矛盾.

如果 $f_1, \cdots f_{n-1}$ 线性无关 由归纳假设 $\exists \tilde{a}_1, \cdots \tilde{a}_{n-1} \in \mathbb{R}$ s.t. $\lambda_n = |B_{n-1}(\tilde{a}_1, \cdots \tilde{a}_{n-1})| \neq 0$

则对
$$\begin{vmatrix} f_1(\tilde{a}_1) & \cdots & f_1(\tilde{a}_{n-1}) & f_1(a_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(\tilde{a}_1) & \cdots & f_{n-1}(\tilde{a}_{n-1}) & f_{n-1}(a_n) \\ f_n(\tilde{a}_1) & \cdots & f_n(\tilde{a}_{n-1}) & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$
按最后一列展开得

$= \lambda_1 f_1(a_n) + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(a_n) + \lambda_n f_n(a_n) = 0$

对 $\forall a_n \in \mathbb{R}$ 成立

$\therefore \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ $(\lambda_n \neq 0)$

$\therefore f_1, \cdots f_n$ 线性相关. 矛盾 $\therefore \exists a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ s.t. $|(f_i(a_j))| \neq 0$ □.

线性映射

设 V, W 为域 F 上的线性空间 映射 $\varphi: V \longrightarrow W$ 满足 $\forall \alpha, \beta \in F$. $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ s.t.

$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \varphi(v_1) + \beta \varphi(v_2)$ （保持线性运动） 则称 φ 为线性映射.

$\ker\varphi := \{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$ 为子空间，称为核 (kernel) 空间.

$\mathrm{Im}\varphi := \varphi(V) = \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} \subseteq W$ 为子空间. 称为像 (image) 空间.

线性同构指 $\underline{\underline{线性双射}}$ 记为 $V \cong W$ eg $V/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

$$V_1/V_1 \cap V_2 \cong V_1 + V_2/V_2$$

线性双射 → 单射 $\Updownarrow$ $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$

线性双射 → 满射 $\Updownarrow$ $\mathrm{Im}\varphi = W$

商空间

设 V 为域 F 上线性空间. $U \subseteq V$ 为子空间

定义等价关系：$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. 称 $\vec{v}_1 \sim_U \vec{v}_2$，如果：$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U$

商集 $V/\sim_U$ 记为 $V/U := \{\vec{v} + U \mid \vec{v} \in V\}$

定义 $\begin{cases} 加法 \ (\vec{v}_1 + U) + (\vec{v}_2 + U) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + U \\ 数乘 \ \alpha(\vec{v} + U) = (\alpha\vec{v}) + U \end{cases}$ 验证 V/U 构成 F 上线性空间. 称为商空间.

维数与基底

设 V 是 F 上线性空间. $S \subseteq V$ 为一个极大线性无关集 (即 $\forall \vec{s}_1, \cdots \vec{s}_k \in S$ 都有 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{s}_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ (i = 1, \cdots k)$ 且对 $\forall \vec{v} \in V \setminus S$，$S \cup \{\vec{v}\}$ 线性相关).

则称 S 为 V 中一组基. $\dim_F V := |S|$ 称为 V 的维数.

$$\dim_F V = \begin{cases} +\infty & 如果 \ |S| = +\infty \quad 无穷维 \\ n & 如果 \ |S| = n \quad 有限维 \\ 0 & 如果 \ V = \{\vec{0}\} \quad 0空间 \end{cases}$$

注：若 S 为 V 的一组基 则 $\forall \vec{v} \in V$ $\exists! (\vec{s}_1, \cdots \vec{s}_k) \in S^k$ s.t. 和 $(\alpha_1, \cdots \alpha_k) \in F^k$ s.t. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{s}_i$

一般用维数相关性质时 都只考虑有限维 线性空间

eg1. 设 $g\in F[x]$ 且 $g\neq 0$ 对 $\forall f\in F[x]$. $\exists!\ (q,r)\in F[x]^2$ s.t. $\begin{cases} f=q\cdot g+r \text{（带余除法）} \\ \deg(r)<\deg(g) \end{cases}$

记 $rem(f,g):=r$ 称为 f 关于 g 的余式.

定义映射 $\varphi_g: F[x]\longrightarrow F[x]$ 容易验证 φ_g 是线性映射.

$\qquad\qquad f \longmapsto rem(f,g)$

证明 1) $\ker(\varphi_g)=\{f\in F[x]\mid g\mid f\}$

2) 求 $\mathrm{im}\varphi_g$ 的一组基.

3) 求 $F[x]/\ker\varphi_g$ 的一组基.

Pf. 1) $\ker(\varphi_g)=\{f\in F[x]\mid \varphi_g(f)=0\}$

$=\{f\in F[x]\mid rem(f,g)=0\}$

$=\{f\in F[x]\mid \exists\, q\in F[x] \text{ s.t. } f=q\cdot g\}$

$=\{f\in F[x]\mid g\mid f\}$

2) $\mathrm{im}\varphi_g=\langle 1,x,\cdots x^{\deg(g)-1}\rangle$ 特别地. 如果 $g\in F$ 则 $\mathrm{im}\varphi_g=\{0\}$

首先 对 x^i $(i=0,1,\cdots \overset{d}{\overbrace{\deg(g)}}-1)$ $\varphi_g(x^i)=x^i$ $\therefore x^i\in \mathrm{im}\varphi_g$

$\therefore \langle 1,x,\cdots x^{d-1}\rangle\subseteq \mathrm{im}\varphi_g$

而且对 $\forall\ r\in \mathrm{im}\varphi_g$. 即 $\exists f\in F[x]$ s.t. $r=rem(f,g)$

则 $\deg(r)<\deg(g)$ $\therefore r\in\langle 1,x,\cdots x^{d-1}\rangle$ $\therefore \mathrm{im}\varphi_g\subseteq\langle 1,x,\cdots x^{d-1}\rangle$

综上. $\mathrm{im}\varphi_g=\langle 1,x,\cdots x^{d-1}\rangle$

3) 首先证明一个更一般的结论.

<u>Lemma</u>. 设 $\varphi: V\longrightarrow W$ 为线性同构 $E=\{\vec e_1,\cdots \vec e_m\}\subseteq V$ 为一组线性无关的向量. 则 $E_1'=\{\varphi(\vec e_1),\cdots \varphi(\vec e_m)\}\subseteq W$ 也线性无关. 反过来, $E_2=\{\vec\varepsilon_1,\cdots \vec\varepsilon_n\}\subseteq W$ 线性无关, 则 $E_2'=\{\varphi^{-1}(\vec\varepsilon_1),\cdots \varphi^{-1}(\vec\varepsilon_n)\}\subseteq V$ 也线性无关.

特别地. 如果 E_1 为 V 的一组基 则 E_1' 也构成 W 一组基.

如果 E_2 为 W 一组基 则 E_2' 也构成 V 一组基.

注. V, W 均为域 F 上的线性空间.

Pf. 设 $\alpha_1, \cdots \alpha_m \in F$ s.t. $\alpha_1\varphi(\vec{e_1}) + \cdots + \alpha_m\varphi(\vec{e_m}) = \vec{0}$ ∵ φ 为线性映射

∴ $\varphi(\alpha_1\vec{e_1} + \cdots + \alpha_m\vec{e_m}) = \vec{0}$ ∵ φ 为双射 ∴ $\ker\varphi = \vec{0}$ ∴ $\alpha_1\vec{e_1} + \cdots + \alpha_m\vec{e_m} = \vec{0}$

∵ $\vec{e_1}, \cdots \vec{e_m}$ 线性无关 ∴ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ ∴ $\widetilde{E_1}$ 线性无关. 反之同理.

如果 E_1 为 V 的一组基 即 E_1 还满足 $\forall \vec{v} \in V$ $\exists x_1, \cdots x_m \in F$ s.t.

$\vec{v} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_m\vec{e_m}$. 则对 $\forall \vec{w} \in W$, ∵ φ 是满射 ∴ $\exists \vec{v} \in V$ s.t. $\vec{w} = \varphi(\vec{v})$

则 $\vec{w} = \varphi(x_1\vec{e_1} + \cdots + x_m\vec{e_m}) = x_1\varphi(\vec{e_1}) + \cdots + x_m\varphi(\vec{e_m})$ ∴ $\vec{w}$ 可由 $\widetilde{E_1}$ 线性表出.

又∵ $\widetilde{E_1}$ 线性无关. ∴ $\widetilde{E_1}$ 构成 W 一组基. 反之同理. □.

现在求 $F[x]/\ker\varphi_g$ 的基底. 考虑线性同构 $\varphi: F[x]/\ker\varphi_g \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_g$

$f + \ker\varphi \longmapsto \varphi_g(f)$

∵ $\{1, x, \cdots x^{d-1}\}$ 构成 $\operatorname{im}\varphi_g$ 的一组基 ~~是~~

∴ $\{1+\ker\varphi_g, x+\ker\varphi_g \cdots x^{d-1}+\ker\varphi_g\}$ 构成 $F[x]/\ker\varphi_g$ 的一组基. □.

习2. 设域 F 且 $\operatorname{char}(F) = 0$ 设 V 为 F 上线性空间. $V_1, \cdots V_m$ 为 V 中子空间.

若 $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ 则 $\exists j \in \{1, 2 \cdots m\}$ s.t. $V = V_j$

(ie. 无限域上的线性空间 如果能表示成若干子空间的并. 则一定等于某个子空间)

Pf (归纳法) 若 $m=1$ 即 $V=V_1$ 得证. 假设若 $\tilde{V} = \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i$ 则 $\exists j \in \{1, \cdots m-1\}$ s.t. $\tilde{V} = V_j$.

现设 $V = \tilde{V} \cup V_m$ 如果 $\tilde{V} \subseteq V_m$ 则 $V = V_m$ 得证. 如果 $V_m \subseteq \tilde{V}$ 则 $V = \tilde{V} = V_j$ 得证

∴ 假设 $\tilde{V} \not\subseteq V_m$ 且 $V_m \not\subseteq \tilde{V}$. 则 $\exists x \in V_m \setminus \tilde{V}$, $y \in \tilde{V} \setminus V_m$.

∵ V 为线性空间 ∴ 对 $\forall \lambda \in F\setminus\{0\}$ $x + \lambda y \in V = \tilde{V} \cup V_m$.

则 $x+\lambda y \in \tilde{V}$ 或 $x + \lambda y \in V_m$. 如果 $x+\lambda y \in V_m$ 则 ∵ $x \in V_m$ ∴ $y \in V_m$ 矛盾.

∴ $x + \lambda y \in \tilde{V} = \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i$ 则 $\exists$ 某个 V_i s.t. $x+\lambda y \in V_i$

另一方面. 设 $x + \lambda_i y \in V_i$, $x + \lambda_i' y \in V_i$ 且 $\lambda_i \neq \lambda_i'$ 则

$\frac{1}{\lambda_i' - \lambda_i}[\lambda_i'(x + \lambda_i y) - \lambda_i(x + \lambda_i' y)] = x \in V_i \subseteq \tilde{V}$ 与 $x \notin \tilde{V}$ 矛盾

∴ $\exists!\ \lambda_i \in F\setminus\{0\}$ s.t. $x + \lambda_i y \in V_i$ 又 ∵ $\operatorname{char}(F) = 0 \Rightarrow F$ 中有无穷多元素.

不妨取 m 个两两不同 $\lambda_1, \cdots \lambda_m \in F\setminus\{0\}$ 有 $x + \lambda_s y \in \bigcup_{i=1}^{m-1} V_i$

则 $x + \lambda_1 y, \cdots x + \lambda_m y$ 分别放入 $V_1, \cdots V_{m-1}$ 中 则一定有 $\exists$ 两个 $x+\lambda_i y$, $x + \lambda_j y \in V_t$

$\rightarrow\leftarrow$ □