第五次作业

1. 设 $\vec{u}_1=(1,1,1)^t$, $\vec{u}_2=(1,1,2)^t$, $\vec{u}_3=(1,2,3)^t$. 证明 $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 并求 $\vec{x}=(6,9,14)^t$ 在其下的坐标.

解: $A \triangleq (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$. 秩为3.

又方秩的行秩 = 列秩. ∴ $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ 线性无关. 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基. 设 $\vec{x}$ 在标准基下的坐标为 α

则 $\alpha=\begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix}$ 且 $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)A \Rightarrow \vec{x}$ 在 $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ 下坐标

为 $A^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

2. $\mathbb{R}^3$ 中 $S=\{\vec{u}_1=(1,2,1)^t, \vec{u}_2=(2,3,3)^t, \vec{u}_3=(3,8,2)^t\}$.

$S'=\{\vec{v}_1=(3,5,8)^t, \vec{v}_2=(5,14,13)^t, \vec{v}_3=(1,9,2)^t\}$.

证 S, S' 为 $\mathbb{R}^3$ 的基. 并求由 S 到 S' 的转换矩阵.

解: $A \triangleq (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&8\\1&3&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ 秩为3. ∴ $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ 线性无关. 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

同理, $B \triangleq (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}3&5&1\\5&14&9\\8&13&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&3&5\\0&0&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 秩3. ∴ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

~~$(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=$~~ 设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准基.

则 $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)A$, $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)B$.

∴ $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)A^{-1}B=\begin{pmatrix}18&-5&-7\\-4&1&2\\-3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\5&14&9\\8&13&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$.

3. 设 F 是特征为 0 的域. $V=F^n$. $U_1=\{\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in V \mid x_1+\cdots+x_n=0\}$.

$U_2=\{\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in V \mid x_1=\cdots=x_n\}$ 证明 U_1, U_2 为 V 的子空间且 $V=U_1\oplus U_2$.

Pf: 设 $\forall \alpha,\beta\in F$, $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n), \vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in U_1$.

则 $x_1+\cdots+x_n=0$, $y_1+\cdots+y_n=0$.

$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=(\alpha x_1+\beta y_1,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)$ $(\alpha x_1+\beta y_1)+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\sum_{i=1}^n x_i+\beta\sum_{i=1}^n y_i=0$

$\therefore \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in U_1$. $\therefore U_1\subseteq V$ 为子空间.

若 $\vec{x},\vec{y}\in U_2$. 则 $x_1=\cdots=x_n$, $y_1=\cdots=y_n$.

对于 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=(\alpha x_1+\beta y_1,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)$. $\alpha x_1+\beta y_1=\cdots=\alpha x_n+\beta y_n$.

$\therefore$ U_2 是 V 的子空间.

$\forall \vec{x}\in U_1\cap U_2$, 有 $x_1+\cdots+x_n \overset{x_i=x_1}{=\!=} nx_1=0 \Rightarrow x_1=\cdots=x_n=0$ $\therefore \vec{x}=\vec{0}$

$\therefore U_1\cap U_2=\{\vec{0}\}$. 且 $U_1\oplus U_2\subseteq V$. 下证 $\dim(U_1\oplus U_2)=\dim V$.

$\dim(U_1\oplus U_2)=\dim U_1+\dim U_2$ 而 U_1 只有一个约束条件. $x_1+\cdots+x_n=0$.

其解空间为 U_1. $\therefore \dim U_1=n-1$. 同理, U_2 有 $n-1$ 个约束条件. ~~$\dim U_2=$~~

即 $\begin{cases} x_1-x_2=0\\ x_2-x_3=0\\ \cdots\\ x_{n-1}-x_n=0\end{cases}$ $\therefore \dim U_2=n-(n-1)=1$. $\therefore \dim(U_1\oplus U_2)=n-1+1=n=\dim V$.

$\therefore V=U_1\oplus U_2$ ▨.

4. 证明 $V=M_n(\mathbb{R})$ 上每个线性函数 f 必形如 $f(X)=tr(AX)$. $A=A_f$ 唯一确定.

Pf: $f: V\longrightarrow \mathbb{R}$.
$X\longmapsto f(X)$

确定一个线性函数的作用, 只要确定它在 V 上一组基的函数值即可.

已知 $\{E_{ij}, \forall 1\le i,j\le n\}$ 为 $V=M_n(\mathbb{R})$ 的一组基.

对于 $\forall X\in V$ $(X=(x_{ij}))$, 设 $X=\sum_{ij} x_{ij}E_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}E_{ij}$

$\therefore f(X) \overset{f\text{线性}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(E_{ij})x_{ij}$

令 $a_{ji}=f(E_{ij})$. 对 $\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$. 设 $A=(a_{ji})_{n\times n}$.

$tr(AX)=tr\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_{j1} & & * \\ & \ddots & \\ * & & n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ji}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(E_{ji})x_{ji}=f(X)$

即对于 V 上每个线性函数 f，均 $\exists A\in V$，s.t. $f(X)=tr(AX)$，对 $\forall X\in V$ 成立.

下证 A 是唯一的. 反证. 若 $\exists A'\in V$，s.t. $f(x)=tr(AX)=tr(A'X)$.

由于 $tr: V\longrightarrow \mathbb{R}$ 线性函数. $\therefore tr(AX-A'X)=tr((A-A')X)=0$，对 $\forall X\in V$ 成立

可取 $X=E_{ij}$，$\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$，易验证 $tr((A-A')E_{ij})=a_{ji}-a_{ji}'=0$

$\therefore a_{ji}=a_{ji}'$ 对 $\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$ 成立. $\therefore A=A'$. 可证 A 是唯一的. ▫.

5. 设 V 是有限维向量空间. $f,g\in V^*$ 且 $\ker f=\ker g$. 证明:

(i). 若 $f\neq 0$，则 $\dim(\ker f)=\dim(V)-1$.

(ii). 必有某个纯量 λ，s.t. $g=\lambda f$.

Pf: (i). $f\in V^*$. 则 $f: V\longrightarrow F$. 线性函数. (V 为域 F 上的线性空间).

$\operatorname{im} f\subseteq F$ 是线性子空间. $\therefore \dim_F(\operatorname{im} f)\leq \dim_F F=1$.

又 $f\neq 0$，则 $\dim(\operatorname{im} f)=1$ $\therefore \dim(\ker f)=\dim(V)-\dim(\operatorname{im} f)=\dim(V)-1$

(ii). V 是有限维向量空间，设 $\dim V=n$，设 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{n-1}\}$ 为 $\ker f$ 一组基.

(设 $f\neq 0$，则 $\dim(\ker f)=n-1$.)

(方1). 由基扩充定理，可扩充为 V 的一组基 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\}$.

下证 $g(\vec{e}_n)\neq 0$. (反证). 若 $g(\vec{e}_n)=0$，则 $\vec{e}_n\in\ker g=\ker f$

则 $\vec{e}_n\in\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{n-1}\rangle$，即 $\{\vec{e}_n,\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{n-1}\}$ 线性相关. 这与它们是一组基矛盾.

$\therefore g(\vec{e}_n)\neq 0$. 令 $\lambda=\dfrac{f(\vec{e}_n)}{g(\vec{e}_n)}$ 对 $\forall\vec{v}\in V$，设 $\vec{v}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{e}_i$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in F$.

则 $(f-\lambda g)(\vec{v})=(f-\lambda g)(\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{e}_i)=f(\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{e}_i)-\lambda g(\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{e}_i)$

$$\xlongequal{f,g\text{ 线性}}\sum_{i=1}^n\alpha_i f(\vec{e}_i)-\lambda\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i g(\vec{e}_i)\right)\xlongequal{\ker f=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{n-1}\rangle}\alpha_n f(\vec{e}_n)-\frac{f(\vec{e}_n)}{g(\vec{e}_n)}\alpha_n g(\vec{e}_n)=0$$

由 $\vec{v}\in V$ 的任意性知 $f-\lambda g=0$ (零函数). 即 $f=\lambda g$. ▫.

若 $f=0$，则 $g=0$，显然 $f=\lambda g$ 成立. ▫.

(方2). 若 $f=0$ 或 $g=0$，则 $f=g=0$ 成立

若 $f\neq 0$. 由 (i) 知 $\dim(\operatorname{im} f)=\dim(F)=1$. 即 f 满射.

则对于 $1\in F$，$\exists\vec{v}_0\in V$. s.t. $f(\vec{v}_0)=1$，令 $\lambda=g(\vec{v}_0)$.

对 $\forall\vec{v}\in V$. 若 $\vec{v}\in\ker f$，则 $f(\vec{v})=g(\vec{v})=0=\lambda f(\vec{v})$.

若 $\vec{v}\notin\ker f$，则 $f(\vec{v}-f(\vec{v})\vec{v}_0)=f(\vec{v})-f(\vec{v})f(\vec{v}_0)=0$

$\Rightarrow\vec{v}-f(\vec{v})\vec{v}_0\in\ker f=\ker g\Rightarrow g(\vec{v})=f(\vec{v})g(\vec{v}_0)=\lambda f(\vec{v})\Rightarrow g=\lambda f$ ▫