第六次作业.

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 求可逆矩阵 P, s.t. P^tAP 为对角形矩阵.

解: 方1 (对称消元法).

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 2 & & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{行 F_{12}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 2 & 2 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{列 F_{12}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{行 F_{21}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 2 & 1 & 2 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[即 F_{12}(-\frac{1}{2})]{列 F_{21}(-\frac{1}{2})^t} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 2 & 0 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{行 F_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow[即 F_{31}(-1)]{列 F_{13}(-1)^t} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^tAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方2 (降维法) $V=\mathbb{R}^3$ 设 $f: V\times V \to \mathbb{R}$ 双线性型, 在 V 中标准基 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 下矩阵为 A

令 $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 则 $f(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1) = \cancel{\vec{\varepsilon}_1^{\,t} A \vec{\varepsilon}_1}\ (0,1,0)A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$

令 $U = \cancel{\ker}\ \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_1) = 0\}$. 求 U 的一组基 设 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

$$f(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_1) = (x_1, x_2, x_3)A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

$\therefore\ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为 U 的一组基.

令 $g: U \times U \to \mathbb{R}$. $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$. 则 g 在 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 下矩阵为 $(g(\vec{u}_i, \vec{u}_j))_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

令 $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 则 $g(\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2) \neq 0$. 求 $\tilde{U} = \{\vec{x} \in U \mid g(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_2) = 0\}$ 的基

令 $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 \in U$, $g(\vec{x}, \vec{\varepsilon}_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2(x_1 + x_2) = 0.$

$\therefore\ \langle \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \rangle = \tilde{U}$ 为 $\tilde{U}$ 的基. 令 $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3)=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^tAP=\begin{pmatrix}f(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1)&&\\&f(\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_2)&\\&&f(\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

2.(席 P41).1. 判断 f 是否为某空间的双线性型. K 是域.

~~解~~: (1). $f(\vec{x},\vec{y})={}^t\vec{x}\cdot\vec{y}$ ($x,y\in K^n$ 列向量).

解: 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\vec{x}'=\begin{pmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in K^n$. $\alpha,\beta\in K$.

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}',\vec{y})=(\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}')^t\cdot\vec{y}=(\alpha x_1+\beta x_1',\cdots,\alpha x_n+\beta x_n')\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n(\alpha x_i+\beta x_i')y_i$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^n x_iy_i+\beta\sum_{i=1}^n x_i'y_i=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x}',\vec{y})$$

同理可证 对于 $\vec{y}'\in K^n$，$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{y}')=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{y}')$.

∴ f 是 K^n 上的双线性型.

(2). $f(A,B)=tr({}^tAB)$ $A,B\in M_{m,n}(K)$.

解: 设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in M_{m,n}(K)$. $\alpha,\beta\in K$.

$$f(\alpha A_1+\beta A_2,B_1)=tr({}^t(\alpha A_1+\beta A_2)B_1)=tr((\alpha{}^tA_1+\beta{}^tA_2)B_1)$$

$$\overset{tr\text{ 线性函数}}{=\!=}tr(\alpha{}^tA_1B_1+\beta{}^tA_2B_1)=\alpha\,tr({}^tA_1B_1)+\beta\,tr({}^tA_2B_1)=\alpha f(A_1,B_1)+\beta f(A_2,B_1).$$

同理可证 $f(A_1,\alpha B_1+\beta B_2)=\alpha f(A_1,B_1)+\beta f(A_1,B_2)$

∴ f 是 K^n 上的双线性型.

(3). $f(A,B)=det(AB)$ $A,B\in M_n(K)$.

解: 设 $A_1,A_2,B\in M_n(K)$. $\alpha,\beta\in K$.

$$f(\alpha A_1+\beta A_2,B)=det((\alpha A_1+\beta A_2)B)=det(\alpha A_1B+\beta A_2B)\neq det(\alpha A_1B)+det(\beta A_2B)$$

det 不是线性函数.

eg: 取 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

$$det(E_{11}+E_{22})=1\neq det(E_{11})+det(E_{22})=0.$$

3. 对向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上的双线性型 $f(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}^t\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\vec{y}$ 求典范基.

解：设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ 则 A 为 f 在 $\mathbb{R}^2$ 中标准基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 下矩阵.

先将A化为对角形 $\left(\begin{array}{cc:cc}2&1&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{行\ F_{21}(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cc:cc}2&1&1&0\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{列\ F_{12}(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cc:cc}2&0&1&0\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$

令 $P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$，则 $P^tAP=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$. 令 $\vec{\varepsilon}_1=P^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\varepsilon}_2=P^{(2)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

可验证 ~~$f(\vec{x},\vec{y})=$~~ f 的典范基是 $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2$.

4. 用降维方法把双线性型化成典范式. 不同于2次型

$f(x,y)=x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+x_2y_2+2x_2y_3+x_3y_1+2x_3y_2+x_3y_3$. 2组不同变量.

解: $f(x,y)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 令 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$

即 A 为 f 在标准基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 下的矩阵. 令 $\vec{\varepsilon}_1=\vec{e}_1$，则 $f(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1)=1\neq0$.

求 $U=\ker(f(\vec{x},\vec{\varepsilon}_1))$ 的一组基. 设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$

$f(\vec{x},\vec{\varepsilon}_1)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=x_1-x_2+x_3=0$.

$\therefore\ \vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是 U 的一组基.

令 $g:\ U\times U\longrightarrow\mathbb{R}$ 则 g 在 $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}$.

降维后的空间U 上的双线性型 $(\vec{x}',\vec{y}')\longmapsto f(\vec{x}',\vec{y}')$.

令 $\vec{\varepsilon}_2=\vec{u}_1-\vec{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$g(\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_2)=6\neq0$.

求 $\tilde{U}=\ker(g(\vec{x},\vec{\varepsilon}_2))$ 的基. 设 $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2\in U$.

则 $g(\vec{x},\vec{\varepsilon}_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=3(x_1-x_2)=0$.

$\Rightarrow$ 令 $\vec{\varepsilon}_3=\vec{u}_1+\vec{u}_2$. 则 $\vec{\varepsilon}_3$ 为 $\tilde{U}$ 的一组基.

$\vec{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ 为 f 的一组典范基.

f 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1) & & \\ & f(\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_2) & \\ & & f(\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 6 & \\ & & -6\end{pmatrix}$

设 $\vec{x} = \alpha_1\vec{\varepsilon}_1 + \alpha_2\vec{\varepsilon}_2 + \alpha_3\vec{\varepsilon}_3$，$\vec{y} = \beta_1\vec{\varepsilon}_1 + \beta_2\vec{\varepsilon}_2 + \beta_3\vec{\varepsilon}_3$

则 $f(\vec{x},\vec{y}) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 6 & \\ & & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1 + 6\alpha_2\beta_2 - 6\alpha_3\beta_3$. 为典范式.

5. 设 V 中域 F 上的线性空间. $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 为 V 的一组基. $a_{ij}\in F$. 其中 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$

证明：存在唯一的双线性型 f, s.t. $f(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = a_{ij}$. 其中 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$

Pf: 存在性. 设 $\vec{x} = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\vec{y} = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in V$. $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

定义 $f: V\times V\to F$.

$$\underset{\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i,\ \sum_{i=1}^n y_i\vec{e}_i\right)}{\overset{}{(\vec{x},\vec{y})}} \longmapsto (x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

由 $\vec{x},\vec{y}$ 在基 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 下的表示唯一，知 f 是良定义的.

$$f(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = (0,\cdots,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},\cdots,0)A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow\text{第}j\text{个} = \vec{A}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = a_{ij},\ \forall\, i,j\in\{1,\cdots,n\}.$$

设 $\vec{x}' = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$，$\alpha,\beta\in F$.

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}',\vec{y}) = (\alpha x_1+\beta x_1',\cdots,\alpha x_n+\beta x_n')A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} + (\beta x_1',\cdots,\beta x_n')A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= \alpha(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} + \beta(x_1',\cdots,x_n')A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \alpha f(\vec{x},\vec{y}) + \beta f(\vec{x}',\vec{y}).$$

同理可证 $f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{x}') = \alpha f(\vec{x},\vec{y}) + \beta f(\vec{x},\vec{x}')$

∴ f 是 V 上双线性型. 且 $f(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = a_{ij}$，$i,j\in\{1,\cdots,n\}$

唯一性. 设 g 为 V 上双线性型 满足 $g(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = a_{ij}$，其中 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$.

$$g(\vec{x},\vec{y}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i,\vec{y}\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\vec{e}_i,\vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i g\left(\vec{e}_i,\sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n y_j g(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = (x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = f(\vec{x},\vec{y}).$$

由 $\vec{x},\vec{y}\in V$ 的任意性知，$g=f$ 是唯一的 □.

双线性型与二次型.

设 V 是域 F 的有限维向量空间

1. 定义: 双线性型 $f: V\times V \longrightarrow F$. $\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$. $\alpha,\beta\in F$

满足 $\begin{cases} f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{z}) + \beta f(\vec{y},\vec{z}) \\ f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{y}) + \beta f(\vec{x},\vec{z}). \end{cases}$

对称双线性型. f 是 V 上的双线性型且对 $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in V$ 有 $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$.

二次型. $q: V\longrightarrow F$ 满足 1). $\forall\ \vec{x}\in V$, 有 $q(\vec{x}) = q(-\vec{x})$.

配极 $\longrightarrow$ 2). $f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})\right)$ 为 V 上的对称双线性型.

2. 固定 V 上的一组基 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$.

· $L_2(V,F) \triangleq \{f: V\times V\to F \mid V\text{上双线性型}\} \cong M_n(F)$. 双线性型 $f \longleftrightarrow A$ 互相唯一决定 (二次型可不定).

$f \longmapsto (f(\vec{e}_i,\vec{e}_j))_{n\times n}$. 称为 f 在 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 下的矩阵表示.

$f: V\times V \longrightarrow F \longleftarrow\!\shortmid\ A = (a_{ij})$

$(\sum x_i\vec{e}_i, \sum y_i\vec{e}_i) \longmapsto (x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$.

~~· $L_2^+(V,F) \triangleq \{f: V\times V\to F \mid \text{对称双线性型}\} \overset{Q(V,F)}{\cong} \{q: V\to F \mid \text{二次型}\} \cong \{F\text{上的齐2次多项式}\}$~~

~~$f(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto q(\vec{x}) \triangleq f(\vec{x},\vec{x}) \longmapsto p(x_1,\cdots,x_n) =$~~

$Q(V,F) \triangleq \{q: V\to F \mid \text{二次型}\} \cong L_2^+(V,F) \triangleq \{V\text{上所有对称双线性型}\} \cong \{F\text{上齐2次多项式}\}$.

$q(\vec{x}) \longmapsto f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})\right) \longmapsto p(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i,j} f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)x_ix_j$

$q(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{x}) \longleftarrow\!\shortmid\ f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\cdots,x_n)B\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid\ p(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

$p(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in SM_n(F)$

3. 合同: 若 $\exists\ P\in GL_n(F)$ 可逆, s.t. $B = P^tAP$, 则称 A 与 B 合同, 记 $A \sim_c B$.

Thm1. 设 f 是 V 上双线性型, V 有 2 组基底 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n\}$.

且 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$, 其中 $P\in GL_n(F)$ 设 f 在这 2 组基下矩阵表示分别为 A, B. 则 $B = P^tAP$. 即 $A\sim_c B$. 特别地 $\mathrm{rank}(f) \triangleq \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

Thm2. $\mathrm{char}(F)\neq 2$. 设 f 是对称双线性型. 则存在 V 的一组基 s.t. f 在该基下的矩阵表示为对角矩阵.

任意对称方阵 A，$\exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in F\setminus\{0\}$，s.t. $A\sim_c\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$.

Thm3. 设 q 为 V 上二次型，$\dim V=n$. $\operatorname{rank}(q)=r$. 则

i). 若 $F=\mathbb{C}$，则 q 在某组基下的矩阵表示为 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$.

ii). 若 $F=\mathbb{R}$. 则 $\exists\ s,t\in\mathbb{N}$，s.t. $s+t=r$ 且 q 在某组基下矩阵表示为 $\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}$

(s,t) 称为 q 的签名.

iii). 对称方阵的角度. $A\in SM_n(F)$. $\operatorname{rank}(A)=r$.

i). $F=\mathbb{C}$，则 $A\sim_c\begin{pmatrix}E_r&\\&0\end{pmatrix}_{n\times n}$.

ii). $F=\mathbb{R}$. 则 $\exists\ s,t\in\mathbb{N}$，s.t. $A\sim_c\begin{pmatrix}E_s&&\\&-E_t&\\&&0\end{pmatrix}$.

iii) $A\sim_c B$，$A,B\in SM_n(F)$. $\Longleftrightarrow s_A=s_B$，$t_A=t_B$. 签名相同

4. 给定二次型(齐2次多项式). 如何求它的规范基、规范型？ $F=\mathbb{R}$.

方1. ①. $q(\vec{x})=p(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j=(x_1,\cdots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&\frac{a_{12}}{2}&\cdots&\frac{a_{1n}}{2}\\\frac{a_{12}}{2}&a_{22}&&\\\vdots&&\ddots&\\\frac{a_{1n}}{2}&&&a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

令此矩阵 A

②. 用矩阵消元法. $(A\ \vdots\ E)\xrightarrow[\text{矩阵}]{\Lambda\text{为对角}}(\Lambda\ \vdots\ \tilde{P})$.

则 $\tilde{P}^{(1)},\cdots,\tilde{P}^{(n)}$ (列向量)为规范基，记作 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 令 $P=\tilde{P}$，则 $P^TAP=\Lambda$

$q(\vec{x})=q\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\varepsilon_i\right)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ 为规范型.

方2. ①. 写出二次型的矩阵 A.

②. 写出二次型的配极 $f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$. (自己验证)

③. 用降维法找到规范基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 则 $\Lambda=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&&\\&\ddots&\\&&f(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}$

方3. 配方法. $p(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n}\tilde{a}_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$

(只求签名时可用配方法)

1). a_{ii} 中至少一个 $\neq 0$. eg. $a_{11}\neq 0$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+\sum_{j=2}^n a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\\y_2=x_2\\\cdots\\y_n=x_n\end{cases}$ ← 非退化线性替换.

$p(\vec{x})=a_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j+\sum_{2\le i\le j\le n}\tilde{a}_{ij}x_ix_j$

$=a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^n a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\right)^2-a_{11}^{-1}\left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{2\le i\le j\le n}\tilde{a}_{ij}x_ix_j$

$=a_{11}y_1^2+\underbrace{\sum_{2\le i\le j\le n}b_{ij}x_ix_j}_{\tilde{p}(x_2,\cdots,x_n)}$.

类似方法，继续处理 $\tilde{p}$. (降变量个数).

2). 所有 $a_{ii}=0$. 但至少一个 $a_{ij}\neq 0$. 设 $a_{12}\neq 0$

令 $\begin{cases}x_1=z_1+z_2\\x_2=z_1-z_2\\x_3=z_3\\\cdots\\x_k=z_k\end{cases}$ 非退化.

$p(\vec{x})=2a_{12}x_1x_2+\cdots$

$=2a_{12}(z_1+z_2)(z_1-z_2)+\tilde{p}(z_1,\cdots,z_n)$

$=2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2+\tilde{p}(z_1,\cdots,z_n)$

类似方法继续处理 $\tilde{p}$ (z_1不出现在 $\tilde{p}$ 中) 或用 1)

Thm. 设 $A\in SM_n(F)$. 令 $\Delta_0=1$, Δ_k 为 A 的 k 阶顺序主子式 $k=1,2,\cdots,n$
如果 $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 都非零, 则 $A\sim_c \begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} & & & \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\end{pmatrix}$

eg: 求二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2+4\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 的秩与签名.

解: $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 设 f 对应的矩阵为 A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1+2(n-1) & 1 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & & & & \\ 1+2(n-1) & 2 & 2 & \cdots & 1\end{vmatrix}=(2n-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & & & & \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=(2n-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)=\Delta_n\ne 0\Rightarrow rank(f)=rank(A)=n.$$

$\Delta_0=1$, $\Delta_1=1$. $\frac{\Delta_1}{\Delta_0}>0$, $\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}<0$, $k=1,2,\cdots,n$ 且 $\Delta_k\ne 0$.

由 Jacobi Thm. $A\sim_c\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}{>0} & & & \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1}{<0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}{<0}\end{pmatrix}\triangleq D$. 签名为 $(1,n-1)$.