第七次作业

1. (i) 化实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$ 为~~标准型~~规范型，线性替换.

解：方1（配方法）. $f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$$
$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2$$
$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\tfrac{2}{3}x_3\right)^2-\tfrac{4}{3}x_3^2+3x_3^2$$
$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\tfrac{2}{3}x_3\right)^2+\tfrac{5}{3}x_3^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 非退化的线性替换.

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3$，线性替换：$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2/3\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cancel{=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}}$

方2（初等变换消元法） $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-2&1&&\\2&5&-4&&1&\\-2&-4&5&&&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_{21}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-2&1&&\\0&3&-2&-1&1&\\-2&-4&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{对称}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-2&1&&\\0&3&-2&-1&1&\\-2&-2&5&0&0&1\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{F_{31}(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-2&1&&\\0&3&-2&-1&1&\\0&-2&3&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{对称}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&&\\0&3&-2&-1&1&\\0&-2&3&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{对称}]{F_{32}(\frac{2}{3})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&3&0&-1&1&0\\0&0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$ 转换矩阵 令 $y=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(y_1,y_2,y_3)P^tAP\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2.$$

(ii). 求 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$ 的签名.

解 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$（非退化）. $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2-2y_1y_3+4y_2y_3$

$$=(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)-y_3^2-(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2)+4y_3^2$$
$$=(y_1-y_3)^2-(y_2-2y_3)^2+3y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ (非退化)，则 $f(x_1,x_2,x_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$.

签名 $(2,1)$.

2. 求实二次型 $f(x_1,\cdots,x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的签名.

解：令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 + y_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 \\ \cdots \\ x_{2n-1} = y_{2n-1} + y_{2n} \\ x_{2n} = y_{2n-1} - y_{2n} \end{cases}$ 非退化线性替换. 则 $f(x_1,\cdots,x_n)$

$= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{2n-1}^2 - y_{2n}^2$

签名 (n,n).

3. 设 $O_{n\times m}$ 为域 F 上的 n 行 m 列零矩阵，$A = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & A_1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B_1 \end{pmatrix}$.

其中 $A_1, B_1 \in GL_m(F)$. 证明：$A \sim_c B$ 当且仅当 $A_1 \sim_c B_1$.

Pf: "$\Leftarrow$" 设 $A_1 \sim_c B_1$，即 $\exists\, P_1 \in GL_m(F)$，s.t. $B_1 = P_1^t A_1 P_1$

令 $P = \begin{pmatrix} E_n & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & P_1 \end{pmatrix} \in GL_{n+m}(F)$. 要构造可逆矩阵 P. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \notin GL_n(F)$

则 $P^tAP = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n^t & 0 \\ 0 & P_1^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1^tA_1P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow A \sim_c B$.

"$\Rightarrow$" 设 $A \sim_c B$，即 $\exists\, P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \in GL_{n+m}(F)$，其中 $P_1 \in M_{n\times n}(F)$，$P_2 \in M_{n\times m}(F)$，$P_3 \in M_{m\times n}(F)$，$P_4 \in M_{m\times m}(F)$.

则 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = B = P^tAP = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} P_1^t & P_3^t \\ P_2^t & P_4^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P_3^tA_1 \\ 0 & P_4^tA_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3^tA_1P_3 & P_3^tA_1P_4 \\ P_4^tA_1P_3 & P_4^tA_1P_4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B_1 = P_4^tA_1P_4$. 只要证明 P_4 非退化即可.

$m = \mathrm{rank}(B_1) \le \min\{\mathrm{rank}(P_4), \mathrm{rank}(A_1)\} \le \mathrm{rank}(P_4) \le m$ （由于 P_4 为 m阶方阵）.

$\Rightarrow \mathrm{rank}(P_4) = m$.　　$\therefore P_4$ 非退化.　　$\therefore A_1 \sim_c B_1$.　　□.

4. 设 $f(X) = X^t A X$ 为实二次型，且 $\exists X_1, X_2$, s.t. $f(X_1) > 0$, $f(X_2) < 0$

证明：$\exists X_3 \ne \vec{0}$, s.t. $f(X_3) = 0$.

Pf: 设 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，其中 $s, t \in \mathbb{N}$. 设 $A = P^t \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix} P$，~~P~~ P 可逆.

令 $Y = PX$，则 $f(X) = X^t A X = X^t P^t \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix} PX = Y^t \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix} Y$.

由于 $\exists X_1, X_2$, s.t. $f(X_1) > 0$, $f(X_2) < 0$. 则 $\underline{s, t > 0}$.

$\therefore f(X) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{s+t}^2$　　令 $Y_3 = (\overset{1}{1}, 0, \cdots, 0, \overset{s+1}{1}, 0, \cdots, 0)^t \ne \vec{0}$.

则 $X_3 = P^{-1} Y_3 \ne \vec{0}$　，$\therefore f(X_3) = 1^2 + 0 + \cdots + 0 - 1^2 - 0 - \cdots - 0 = 0$.

5. $P \in F[x_1, \cdots, x_n]$ 齐二次多项式，$\ell_1, \ell_2 \in F[x_1, \cdots, x_n]$ 齐一次多项式.

证明：若 $P(x_1, \cdots, x_n) = \ell_1(x_1, \cdots, x_n)\ell_2(x_1, \cdots, x_n)$，则 $\mathrm{rank}(P) \le 2$.

Pf: 若齐二次多项式可分解成2个一次多项式之积，则这两多项式一定是齐次的（自己证）.

设 $\ell_1(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$，$\ell_2(x_1, \cdots, x_2) = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$.

设 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)^t$，$\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)^t \in F^n$，以下求二次型 q 所对应的对称矩阵.

P 的配极：$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(P(\vec{x}+\vec{y}) - P(\vec{x}) - P(\vec{y}))$　　对称双线性型.

$$= \frac{1}{2}(\ell_1(\vec{x}+\vec{y})\ell_2(\vec{x}+\vec{y}) - \ell_1(\vec{x})\ell_2(\vec{x}) - \ell_1(\vec{y})\ell_2(\vec{y}))$$

$$\overset{\ell_1, \ell_2 \text{齐一次}}{=\!=} \frac{1}{2}\left[(\ell_1(\vec{x}) + \ell_1(\vec{y}))(\ell_2(\vec{x}) + \ell_2(\vec{y})) - \ell_1(\vec{x})\ell_2(\vec{x}) - \ell_1(\vec{y})\ell_2(\vec{y})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ell_1(\vec{x})\ell_2(\vec{y}) + \ell_1(\vec{y})\ell_2(\vec{x})) = \frac{1}{2}(\ell_1(\vec{x})\ell_2(\vec{y}) + \ell_2(\vec{x})\ell_1(\vec{y})).$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right]$$

$$= (x_1, \cdots, x_n)\left[\left(\frac{b_1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\vec{\alpha}}, \cdots, \frac{b_n}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) + \left(\frac{a_1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{\beta}}, \cdots, \frac{a_n}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right]\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \cdots, x_n) \underbrace{\left(\frac{b_1}{2}\vec{\alpha} + \frac{a_1}{2}\vec{\beta}, \cdots, \frac{b_n}{2}\vec{\alpha} + \frac{a_n}{2}\vec{\beta}\right)}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

∴ A为 f 的矩阵表示.

∴ $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(A) = \dim(\langle \vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)} \rangle) = \dim(\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle) \leq 2$. ▢.

$F = \mathbb{C}$. P可约.

注: $p(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$. $F = \mathbb{R}$. 若 p 可分解为2个一次多项式, 则 ① $a_2 = -a_1$

标准型. $a_1, a_2 = \pm 1$

$p = a_1(x_1^2 - x_2^2) = a_1(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$.

② $a_2 = 0$. $p(x_1, x_2) = a_1 x_1^2$.

$p(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ 不可约.

· 在 $\mathbb{C}$ 上, 多变元多项式不一定可分解为一次因式之积. 只有单变元时才可分解至一次不可约因式.

· T5 对任何 $\mathrm{char}(F) \neq 2$ 的数域都成立.

注: $p(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) = (x_1, \cdots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \cdots, b_n)}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 不能说明 A 为 P 对应的矩阵. ∵ P为齐二次型, 对应对角方阵.

A 不一定对称. 当 A 对称时, 满足上式的 A 唯一.

eg: $p(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

双线性型 $f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 对应的矩阵 A 唯一.

§1. 正定二次型与正定矩阵

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 为 V 的一组标准基.

惯性定理. 设 q 为 V 上的二次型，则 $\exists$ V 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ s.t.

$q(x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2$. 称之为 q 的标准型

标准型是唯一的. (s, t) 称为 q 的签名. $\mathrm{rank}(q) = s+t$
正 负惯性指数.

(矩阵版本). $\forall A \in \underline{SM}_n(\mathbb{R})$, 唯一对应一个 V 上的实二次型 $q_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\therefore$ 实对称矩阵 A ~~正定~~ 的类型与 q_A 的类型相同.

定理 1. 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$. (s, t) 是 A 的签名.

则 (i). A 半正定 $\Leftrightarrow$ $t = 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$, s.t. $A = B^t B$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$ $\Leftrightarrow$ A 的所有~~顺序~~主子式 ≥ 0.

(ii). A 正定 $\Leftrightarrow$ $s = n = r$ $\Leftrightarrow$ $A \sim_c E$ $\Leftrightarrow$ $\exists B \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $A = B^t B$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$ $\Leftrightarrow$ A 的所有 (顺序) 主子式 > 0.

(iii). A 半负定 $\Leftrightarrow$ $-A$ 半正定. A 负定 $\Leftrightarrow$ $-A$ 正定.

命题. (i) A 正定 $\Rightarrow 0 < |A| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

~~(ii). A 正定 $\Rightarrow$ $|A| > 0$.~~

Cor (Hadamard 不等式). $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $|A| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)}$

§2. Hadamard 乘积 (children product).

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. 定义: $A \odot B = (a_{ij} b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

性质: (i). $A \odot (B + C) = A \odot B + A \odot C$.

eg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii). $A \odot B = B \odot C$

(iii). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \odot A = A \odot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A$.

则 $\left(M_n(\mathbb{R}), +, O_{n \times n}, \odot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right)$ 为交换环

(iv). A 关于 $\odot$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 可逆，即 $a_{ij} \neq 0$.

定理（schur乘积定理）.

设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是（半）正定矩阵，则 $A\odot B$ 也是（半）正定矩阵.

Pf:（以正定情形为例）. $\because$ B 正定，$\therefore \exists\ T=(t_{ij})\in GL_n(\mathbb{R})$

s.t. $B=T^tT$，即 $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}$

对 $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$，有 $\vec{x}^t(A\odot B)\vec{x}=\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum\limits_{i,j} a_{ij}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}\right)x_ix_j$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j} a_{ij}(t_{ki}t_{kj})(x_ix_j)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i,j} a_{ij}(t_{ki}x_i)(t_{kj}x_j)\right]=\sum_{k=1}^{n}\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k$$

其中 $\vec{y}_k=\begin{pmatrix} t_{k1}x_1\\ \vdots\\ t_{kn}x_n\end{pmatrix}$. 由于 A 正定，当 $\vec{y}_k\neq\vec{0}$ 时，$\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k>0$.

$\therefore\ \forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$，$\exists\ k\in\{1,\cdots,n\}$，s.t. $T_{(k)}\underset{}{\overset{T\text{非退化}}{\neq}}\vec{0}$，且 $\vec{y}_k\neq\vec{0}$

$\therefore\ \forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$，有 $\vec{x}^t(A\odot B)\vec{x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k>0$ $\therefore$ $A\odot B$ 正定. $\square$

应用（机器学习）"核函数"（处理样本数据）. $\mathcal{X}$ 为输入空间（$\mathbb{R}$ 上的线性空间）. $K:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}$ 对称函数.

Thm. K 是核函数 $\Longleftrightarrow$ 对任意数据 $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\}\subseteq\mathcal{X}$，$K=\underset{\uparrow\ \text{核矩阵}}{\left(K(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\right)_{n\times n}}$ 半正定.

eg. 常用核函数.

1. 线性核. $K(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=\vec{x}_i^{\,t}\vec{x}_j$

$$\underset{\text{gram矩阵}}{K}=\left(K(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\right)_{n\times n}=\left(\vec{x}_i^{\,t}\vec{x}_j\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}\vec{x}_1^{\,t}\\ \vdots\\ \vec{x}_n^{\,t}\end{pmatrix}\underbrace{(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n)}_{A}\triangleq A^tA\ \text{半正定}.$$

2. 多项式核 $K(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=\left(\vec{x}_i^{\,t}\vec{x}_j\right)^d$，$d\geq 1$.

设 K 为线性核的核矩阵，则多项式核的核矩阵为

$K_d=\underbrace{K\odot\cdots\odot K}_{d\text{个}}$. 由schur乘积定理知，$K_d$ 半正定.