1. (1). 举例. 正定矩阵 (a_{ij}) 可在某些 (i,j) 处的值 a_{ij} 是负的.
   (2). 实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 所有的值均正, 但 A 不是正定的.

解: 以 $M_2(\mathbb{R})$ 中矩阵为例.

(1). 令 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=|A|=3+1=4>0$. $\Rightarrow$ A 正定.

(2). 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $|A|=3-4=-1<0$. $\Rightarrow$ A 非正定.

2. 实二次型 $q=\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$. 在 λ 取何值时负定?

解: $$q(\vec{x})=(x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}}_{-A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$ 令 $A=\begin{pmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

判定 q 何时负定即判定 A 何时正定.

$\Delta_1=-\lambda>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-2\lambda-1>0$

$$\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & -1-\lambda & 1+3\lambda\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-5\lambda-\ >0$$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda<0\\ \lambda<-\frac{1}{2}\\ \lambda<-\frac{3}{5}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lambda<-\frac{3}{5}$. 时 q 负定.

3. 设 $M_F\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}$, ~~$k=1$~~, 是矩阵 F 对应的实二次型 q 的主子式. 证明: 只有当 $(-1)^k M_F\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}>0$ 对所有 $k=1,2,\cdots,n$ 成立, q 和 F 才能负定.

Pf: q 和 F 负定 $\Leftrightarrow$ $-q$ 和 $-F$ 正定 $\Leftrightarrow$ $-F$ 所有的(顺序)主子式都 >0.

设 $F=(f_{ij})$

$$|-F|=\begin{vmatrix}-f_{11} & \cdots & -f_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ -f_{n1} & \cdots & -f_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & & \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^n|F|.$$

设 F 的各阶主子式为 $M_F\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}$

$\therefore$ $-F$ 的各阶顺序主子式分别为 $(-1)^k M_F\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}$ $k=1,2,\cdots,n$.

$\therefore$ q 和 F 负定 $\Leftrightarrow$ $(-1)^k M_F\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ i_1,\cdots,i_k\end{pmatrix}>0$ 对 $\forall$ $k=1,2,\cdots n$ 成立. ☐.

4. 设 A 是任意一个实对称矩阵，$\varepsilon=\varepsilon(A)$ 是个充分小的实数.

证明，矩阵 $B=E+\varepsilon A$ 是正定的.

Pf: 设 B 的各阶顺序主子式为 Δ_k, $k=1,\cdots,n$. 设 $B=(b_{ij})$, $A=(a_{ij})$.

方1. $\Delta_k=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1k} \\ \varepsilon a_{12} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon a_{1k} & \varepsilon a_{2k} & & 1+\varepsilon a_{kk} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{定义}]{\text{行列式}} \sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon_\sigma b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2}\cdots b_{\sigma(k),k}$.

$=b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}+\sum_{\sigma\in S_k\setminus(1)} \varepsilon_\sigma b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(k),k} = 1+C_{k1}\varepsilon+C_{k2}\varepsilon^2+\cdots+C_{kk}\varepsilon^k$

设 $C_k=\max\{|C_{ki}|, i=1,\cdots,k\}>0$

则 $\Delta_k \geqslant 1-C_k\varepsilon-C_k\varepsilon^2-\cdots-C_k\varepsilon^k$ ~~$=1-C_k\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^n)}{1-\varepsilon}$~~. 令 $\varepsilon<\frac{1}{C_k+1}$

则 $\Delta_k \geqslant 1-C_k(\varepsilon+\cdots+\varepsilon^k) > 1-C_k\left(\frac{1}{C_k+1}+\cdots+\frac{1}{(C_k+1)^k}\right)$

$=1-C_k\frac{\frac{1}{C_k+1}\left(1-\frac{1}{(C_k+1)^k}\right)}{1-\frac{1}{C_k+1}} = 1-C_k\frac{1-\frac{1}{(C_k+1)^k}}{C_k+\cancel{1}-\cancel{1}} = \frac{1}{(C_k+1)^k}>0$.

令 $C=\min\left\{\frac{1}{C_1+1},\frac{1}{C_2+1},\cdots,\frac{1}{C_n+1}\right\}>0$, 则 $\forall\ 0<\varepsilon<C$

都有 $\Delta_k>0$, 对 $\forall k=1,\cdots,n$ 成立 $\therefore B=E+\varepsilon A$ 正定. ∎

(方2 分析角度). $\Delta_k=1+C_{k1}\varepsilon+\cdots+C_{kk}\varepsilon^k$ 是关于 ε 的连续函数, $k=1,\cdots,n$.

$\varepsilon=0$ 时, $B=E$, $\Delta_k=1>0$.

$\therefore \exists\ \delta>0$, st. $0<\varepsilon<\delta$ 时, $\Delta_k>0$. 对 $k=1,\cdots,n$ 成立.

$\therefore B=E+\varepsilon A$ 正定.

∎.

5. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 证明:

(1). A 斜对称 $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}=0$.

(2). 若 $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 且 $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}=0$, 则 $A=O_{n\times n}$.

Pf: (1) "$\Rightarrow$" $A^t=-A$, 则 $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

$\vec{x}^tA\vec{x}=(\vec{x}^tA\vec{x})^t=\vec{x}^tA^t\vec{x}=\vec{x}^t(-A)\vec{x}=-\vec{x}^tA\vec{x}$

又 $\mathrm{char}(\mathbb{R})\neq 2$, $\therefore \vec{x}^tA\vec{x}=0$.

"$\Leftarrow$" 设 $A=(a_{ij})$. 则对 $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

$$0=\vec{x}^t A\vec{x}=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j \quad (*)$$

分别令 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow$ 第 i 行, $i=1,2,\cdots,n$. 代入 $(*)$ 可得 $a_{ii}=0$, $i=1,\cdots,n$.

则 $0=\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$. 再分别令 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow i\\ \\ \leftarrow j\end{matrix}$, $1\le i<j\le n$.

代入 $(*)$, 可得 $a_{ij}+a_{ji}=0$, 即 $a_{ij}=-a_{ji}$, 对 $\forall\ 1\le i<j\le n$ 成立.

$\therefore A=-A^t$ $\therefore$ A 为斜对称矩阵. ▨.

(2). 由 (1) 知, $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}=0\Rightarrow A$ 是斜对称矩阵, 即 $A^t=-A$

(方1) 又 $A\in SM_n(\mathbb{R})$, $\therefore A=A^t=-A$ 又 $\mathrm{char}(\mathbb{R})\neq 2$. $\therefore$ $A=0_{n\times n}$. ▨.

(方2). 令 $q(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$ 且 $A\in SM_n(\mathbb{R})$. 则 A 为二次型 q 的矩阵表示.

又 $\because$ 二次型对应的对称矩阵唯一. 且 $q(\vec{x})=0$ 对 $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 成立

$\therefore A=0_{n\times n}$. ▨

6. 证明 (1). $q(A)=tr(A^tA)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的正定$\boxed{\text{二次型}}$.

(2). 若 $A^tA=A^2$, 则 A 是对称矩阵.

Pf: (1). 首先证明 q 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的二次型. 设 $B\in M_n(\mathbb{R})$

$q(-A)=\cancel{tA}\ tr((-A)^t(-A))=tr(A^tA)=q(A)$.

令 $f(A,B)=\frac{1}{2}[q(A+B)-q(A)-q(B)]=\frac{1}{2}\left(tr((A+B)^t(A+B))-tr(A^tA)-tr(B^tB)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(tr(A^tA+B^tA+A^tB+B^tB)-tr(A^tA)-tr(B^tB)\right)$

$=\frac{1}{2}tr(B^tA)+\frac{1}{2}tr(A^tB)\ (=f(B,A))$.

由 tr 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的线性函数知 f 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的(对称)双线性函数.

$\forall A\neq 0\in M_n(\mathbb{R})$, $\exists\ a_{ij}\neq 0$ 对 $1\le i,j\le n$ 成立, 则有

$$tr(A^tA)=tr\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{i1}^2 & & *\\ & \sum_{i=1}^n a_{i2}^2 & \\ * & & \ddots\ \sum_{i=1}^n a_{in}^2\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2>0.$$ $\therefore q$ 为 $M_n(\mathbb{R})$ 上的正定二次型.

(2). $q(A-A^t) = tr((A-A^t)^t(A-A^t)) = tr((A^t-A)(A-A^t))$

$= tr(A^tA - A^2 - A^tA^t + AA^t) \xlongequal{A^tA=A^2} tr(AA^t - A^tA^t) = tr(AA^t) - tr(A^tA^t)$

又 $\because A^tA^t = (A^t)^2 = (A^2)^t = (A^tA)^t = A^tA$ 且 $tr(A^tA) = tr(AA^t) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$

$\therefore q(A-A^t) = tr(AA^t) - tr(A^tA^t) = tr(AA^t) - tr(A^tA) = tr(AA^t) - tr(AA^t) = 0$

由于 q 是正定二次型，则 $A-A^t=0$，即 $A=A^t$. ▭.

$\boxed{\text{上节课更正}}$：设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$.

A 半正定 $\Longleftrightarrow$ A 的各阶主子式 ≥ 0.

A 正定 $\Longleftrightarrow$ A 的各阶（顺序）主子式 > 0.

A 的 k 阶主子式：$M_A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ i_1, \cdots, i_k \end{pmatrix}$

k 阶顺序主子式：$M_A\begin{pmatrix} 1, \cdots, k \\ 1, \cdots, k \end{pmatrix}$

k 阶子式：$M_A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}$.

eg: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ A 的各阶顺序主子式 ≥ 0，但 A 半负定，不是半正定.

引理. 设 $A, B \in M_n(F)$. $tr(AB) = tr(BA)$.

证：设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$. $C = AB = (c_{ij})_{n\times n}$，$D = BA = (d_{ij})_{n\times n}$

$\cancel{c_{ii}}$ $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$，$d_{kk} = \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$.

$tr(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$.

$tr(D) = \sum_{k=1}^n d_{kk} = \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$. //

$\Rightarrow tr(C) = tr(D)$

i.e. $tr(AB) = tr(BA)$.

例. 证明. $q: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. 是二次型. 并计算签名.

$$A \longmapsto tr(A^2).$$

Pf: 设 $f: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. 易证 f 是双线性型.

$$(A, B) \longmapsto tr(AB).$$

$f(A,B) = tr(AB) = tr(BA) = f(B,A)$. $\Rightarrow$ f 是对称双线性型.

$\therefore q(A) = f(A, A)$ 是二次型.

设 E_{ij} $(i,j=1,\cdots,n)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的标准基.

易证 $tr(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} 1, & (i,j)=(l,k) \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$

对 $\forall$ $X \overset{=(x_{ij})}{\in} M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$

$$\therefore q(X) = f(X, X) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}, \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_{kl}E_{kl}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(x_{ij}x_{kl}) f(E_{ij}, E_{kl}).$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{ji} = x_{11}^2 + \cdots + x_{nn}^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2x_{ij}x_{ji}$$

令 $\begin{cases} x_{ii} = y_{ii}, & (i=1,\cdots,n) \\ x_{ij} = y_{ij} + y_{ji} & \\ x_{ji} = y_{ij} - y_{ji} & (1\le i<j\le n). \end{cases}$

$$\therefore q(X) = \sum_{i=1}^{n} y_{ii}^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(y_{ij}^2 - y_{ji}^2)$$

签名 $\left(n + \binom{n}{2}, \binom{n}{2}\right) = \left(\frac{(n+1)n}{2}, \frac{(n-1)n}{2}\right)$. $\square$

注: 设 $q_1: SM_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. $q_2: AM_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A \longmapsto tr(A^2) \qquad\qquad A \longmapsto tr(A^2).$$

则 $q_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$

$q_2(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{ji} = -2\sum_{1\le i<j\le n} x_{ij}^2$

则对 $\forall X \in SM_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $q_1(X) > 0$. $\Rightarrow$ q_1 正定.

$\forall X \in AM_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $q_2(X) < 0$ $\Rightarrow$ q_2 负定. $\square$

§1. 线性映射.

设 V, W 为域 F 上的线性空间. $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 为 V 的基. $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\}$ 为 W 的基

$\varphi\in \mathrm{Hom}(V,W)$, 设 $\varphi(\vec{e}_i)=\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\vec{\varepsilon}_k=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix}$, $i=1,\cdots,n$

$a_{ij}\in F$.

则 $(\varphi(\vec{e}_1),\cdots,\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)A$, 这里 $A=(a_{ij})$

称 A 为 φ 在 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\}$ 下的矩阵表示且唯一.

$$\mathrm{Hom}(V,W)\cong F^{m\times n}$$

$$\varphi\longmapsto A_\varphi.$$

A_φ 为 φ 在 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\}$ 下的矩阵

$$\varphi_A:\vec{x}\mapsto A\vec{x}\longleftarrow A$$

记 $\mathrm{rank}(\varphi)=\dim(\mathrm{im}\,\varphi)=\mathrm{rank}(A)$. 则 $\dim(V)=\mathrm{rank}\,\varphi+\dim(V_A)$

$(=\dim(\mathrm{im}\,\varphi)+\dim(\ker\varphi))$.

eg 1. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. 求 $\varphi: M_2(\mathbb{R})\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $X\longmapsto XA$ 在 $\underset{E_{11}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$, $\underset{E_{12}}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$, $\underset{E_{21}}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}$, $\underset{E_{22}}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$ 下的矩阵表示和秩.

解: $\varphi(E_{11})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}$

$\varphi(E_{12})=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=cE_{11}+dE_{12}$

$\varphi(E_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}=aE_{21}+bE_{22}$

$\varphi(E_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}=cE_{21}+dE_{22}$.

$\therefore (\varphi(E_{11}),\varphi(E_{12}),\varphi(E_{21}),\varphi(E_{22}))=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$

$\therefore \mathrm{rank}\,\varphi=2\cdot\mathrm{rank}\,A$.

Lemma. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\,A+\mathrm{rank}\,B$.

§2. 矩阵表示的运算

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi \leftrightarrow B"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & W \arrow[d, "\psi \leftrightarrow A"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\psi\circ\varphi \updownarrow AB$.

则 $\psi\circ\varphi$ 的矩阵表示为 AB

$$\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$$
$$\Updownarrow$$

Thm. 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(W,U)$. 则 $\mathrm{rank}(\psi\circ\varphi) \le \min\{\mathrm{rank}\,\psi, \mathrm{rank}\,\varphi\}$

Pf: 即证 $\dim(\mathrm{im}(\psi\circ\varphi)) \le \min\{\dim(\mathrm{im}\,\psi), \dim(\mathrm{im}\,\varphi)\}$.

首先证明 ~~任~~ $\bar{V} \subseteq V$ 子空间, 则 $\dim(\varphi(\bar{V})) \le \dim \bar{V}$

由于 $\dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{im}\,\varphi) = \dim V$. 令 $\overset{=\varphi|_{\bar{V}}}{\bar{\varphi}}: \bar{V} \longrightarrow \varphi(\bar{V})$ 线性映射.
$\bar{v} \longmapsto \varphi(\bar{v})$.

则 $\bar{\varphi}$ 满, 且 $\dim(\ker\bar{\varphi}) + \dim(\mathrm{im}\,\bar{\varphi}) = \dim(\ker\bar{\varphi}) + \dim(\varphi(\bar{V})) = \dim(\bar{V})$

$\Rightarrow \dim(\varphi(\bar{V})) \le \dim \bar{V}$

$\mathrm{im}(\psi\circ\varphi) = \psi(\mathrm{im}\,\varphi)$. $\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\psi\circ\varphi)) \le \dim(\mathrm{im}\,\varphi)$;

又 $\because \mathrm{im}\,\varphi \subseteq W$ $\therefore \psi(\mathrm{im}\,\varphi) \subseteq \psi(W) = \mathrm{im}(\psi)$.

$\therefore \dim(\mathrm{im}(\psi\circ\varphi)) = \dim(\psi(\mathrm{im}\,\varphi)) \le \dim(\mathrm{im}\,\psi)$

综上 $\dim(\mathrm{im}\,\psi\circ\varphi) \le \min\{\dim(\mathrm{im}\,\varphi), \dim(\mathrm{im}\,\psi)\}$. $\square$

§3. 线性算子.

1. $\mathrm{Hom}(V,V)$ 中的元素称为线性算子. 记 $\mathcal{L}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$.
   $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$; $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵 $A \in M_n(F)$. 简称 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵.

2. Thm. V 中 2组基: $(\vec{e}_1',\cdots,\vec{e}_n') = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$. $P \in GL_n(F)$.
   W 中 $(\vec{\varepsilon}_1',\cdots,\vec{\varepsilon}_m') = (\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m)Q$. $Q \in GL_n(F)$.
   设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵为 A.
   $\vec{e}_1',\cdots,\vec{e}_n'$; $\vec{\varepsilon}_1',\cdots,\vec{\varepsilon}_m'$ 下的矩阵 A' $\Rightarrow A' = Q^{-1}AP$.

· $V=W$ 时. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 在基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下矩阵为 A, 在基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 下矩阵为 A'
且 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$. 则 $A' = P^{-1}AP$.

3. 相似: 设 $A, B \in M_n(F)$. 若 $\exists P \in GL_n(F)$ s.t. $B = P^{-1}AP$
   则称 B 与 A 相似. 记 $B \sim A$.