

中国科学院大学线性代数(上)第一次作业题

主讲老师: 李子明

助教: 杜昊, 郭婧

1. 判断下列线性方程组是相容的还是不相容的; 如果相容, 判断是确定的还是不定的。(鼓励用矩阵语言写)

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

2. 利用数学归纳法求证下列恒等式:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. 设如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

所有系数都是实数, 且有两组解:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

求证对任意实数 c ,

$$\begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

也是方程组 (*) 的解。