

中国科学院大学线性代数(上)第十六次作业题
主讲老师: 李子明
助教: 杜昊, 郭婧

1. 柯斯特利金-代数学引论(第一卷) 第161页: 1.

2. 设多项式 $f(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求 $f(A)$.

3. 设 F 是一个域, $a, b \in F$ 且 $a \neq 0$. 设 $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$. 证明 $\deg(f(x)) = \deg(f(ax + b))$, 并计算 $f(ax + b)$ 的首项系数.

4. 设 F 是一个域, $f, g, h \in F[x]$. 证明: 若 $\gcd(f, h) = \gcd(g, h) = 1$, 则 $\gcd(fg, h) = 1$.

5. 判定下列多项式在所处的环中是否可约, 如果可约, 计算其不可约分解. 如果不可约, 请说明理由.

(i) $\mathbb{Z}_p[x]$ 中的多项式 $x^p - \bar{1}$.

(ii) $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式 $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 2$.

(iii) $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式 $x^p + px + 1$, 其中 p 是奇素数.